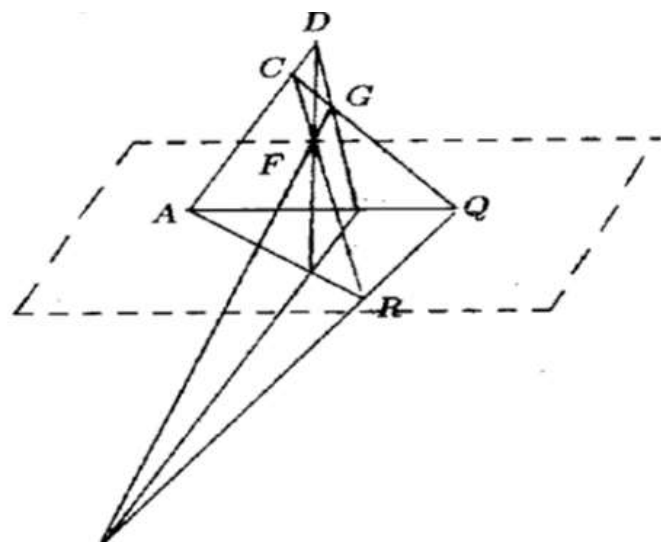
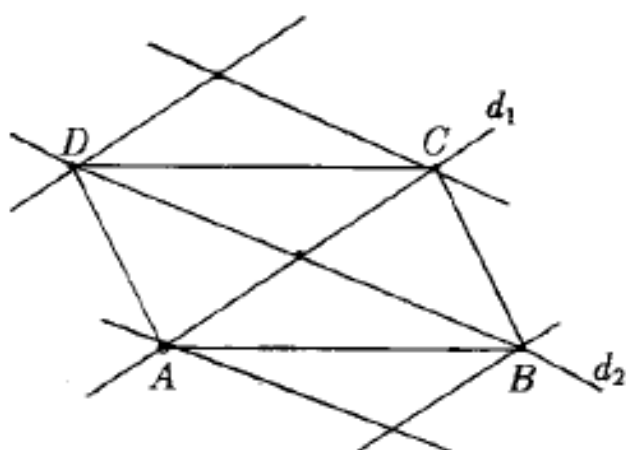


Florentin Smarandache

Probleme de geometrie și trigonometrie, compilate și rezolvate



FLORENTIN SMARANDACHE

Probleme de geometrie și trigonometrie,
compilate și rezolvate

Ediția a II-a, revăzută și adăugită

Oradea - Chișinău

2015

Universitatea de Stat din Moldova, Catedra de Geometrie
str. Alexe Mateevici, 60
Chișinău, MD-2009
Republica Moldova

Societatea cultural-științifică AdSumus
str. D. Cantemir, 13
Oradea, RO-410473
România

Referenți:

Prof. Octavian Cira, Universitatea "Aurel Vlaicu", Arad, România.
Dr. Mirela Teodorescu, Universitatea din Craiova, România. Prof.
Prof. Ștefan Vlăduțescu, Universitatea din Craiova, România.

ISBN 978-1-59973-325-8



Copyright:

Florentin Smarandache 1998-2015

Cuprins

Notă introductivă / 4
Probleme de geometrie (clasa a IX-a) / 5
Probleme de geometrie și trigonometrie / 30
Probleme diverse / 50
Probleme recapitulative (I) / 59
Probleme de geometrie spațială / 64
Drepte și plane / 88
Probleme recapitulative (II) / 100
Proiecții / 131
Probleme de geometrie și trigonometrie (clasa a X-a) / 146

Notă introductivă

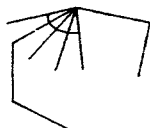
Acest volum este o versiune nouă, revizuită și adăugită, a "Problemelor Compilate și Rezolvate de Geometrie și Trigonometrie" (Universitatea din Moldova, Chișinău, 169 p., 1998), și include probleme de geometrie și trigonometrie, compilate și soluționate în perioada 1981-1988, când profesam matematica la Colegiul Național "Petrache Poenaru" din Bălcești, Vâlcea (Romania), la Lycée Sidi El Hassan Lyoussi din Sefrou (Maroc), apoi la Colegiul Național "Nicolae Balcescu" din Craiova. Gradul de dificultate al problemelor este de la mediu spre greu. Cartea se dorește material didactic pentru elevi, studenți și profesori.

Autorul

Probleme de geometrie (clasa a IX-a)

1) Măsura unui unghi al unui poligon regulat este de 4 ori mare decât măsura unui unghi exterior. Câte laturi are poligonul?

Soluție:



$$\frac{180(n-2)}{n} = 4 \frac{180}{5} \Rightarrow n = 10$$

2) Câte laturi are un poligon convex dacă toate unghiurile sale exterioare sunt optuze?

Soluție:

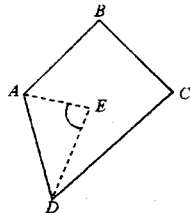
$$\left. \begin{array}{l} \text{Fie } n = 3 \\ \Rightarrow \\ x_1; x_2; x_3 \nless \text{ ext} \end{array} \right\} \begin{array}{l} x_1 > 90 \\ x_2 > 90 \\ x_3 > 90 \end{array} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 > 270 \text{ deci } n = 3 \text{ este posibil}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Fie } n = 4 \\ \Rightarrow \\ x_1; x_2; x_3; x_4 \nless \text{ ext} \end{array} \right\} \begin{array}{l} x_1 > 90 \\ \vdots \\ x_4 > 90 \end{array} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 > 360 \text{ imposibil}$$

Deci $n = 3$.

3) Să se arate că într-un patrulater convex, bisectoarea a 2 consecutive formează un unghi a cărui măsură este egală cu semisuma măsurilor celorlalte 2 unghiuri.

Soluție:



$$m(\widehat{AEB}) = \frac{m(\widehat{D}) + m(\widehat{C})}{2}$$

$$m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) + m(\widehat{D}) = 360^\circ$$

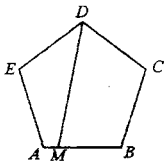
$$\frac{m(\widehat{A}) + m(\widehat{B})}{2} = 180^\circ - \frac{m(\widehat{C}) + m(\widehat{D})}{2}$$

$$m(\widehat{AEB}) = 180^\circ - \frac{m(\widehat{A})}{2} - \frac{m(\widehat{B})}{2} =$$

$$= 180^\circ - 180^\circ + \frac{m(\widehat{C}) + m(\widehat{D})}{2} = \frac{m(\widehat{C}) + m(\widehat{D})}{2}$$

4) Arătați că o suprafață pentagonală convexă poate fi descompusă în două suprafețe patrulate.

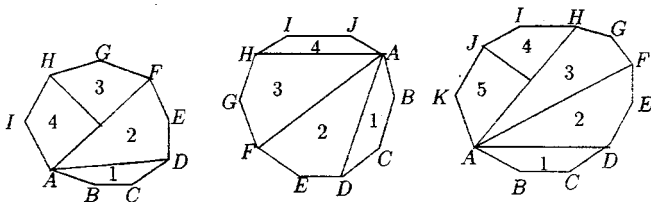
Soluție:



Fie $\widehat{EDC} \Rightarrow A, B \in \text{int. } \widehat{EDC}$. Fie $M \in |AB| \Rightarrow M \in \text{int. } \widehat{EDC} \Rightarrow |DM \subset \text{int. } \widehat{EDC} |EA| \cap |DM| = \emptyset \Rightarrow DEAM \text{ patrulater. La fel } DCBM$

5) Care este numărul minim de suprafețe patrulate în care se descompune o suprafață poligonală convexă cu 9, 10, 11 vîrfuri?

Soluție:



9 vîrfuri - 4 patrulate 10 vîrfuri - 4 patrulate 11 vîrfuri - 5 patrulate

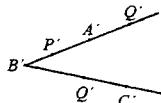
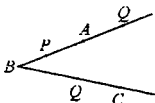
6) Dacă $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$ atunci \exists o funcție bijectivă $f = \widehat{ABC} \rightarrow \widehat{A'B'C'}$ a.i. pentru $\forall 2$ puncte $P, Q \in \widehat{ABC}$, $\|PQ\| = \|f(P), f(Q)\|$ și reciproc.

Soluție:

Presupunem că $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$. Construim o funcție $f : \widehat{ABC} \rightarrow \widehat{A'B'C'}$ a.i.

$$\begin{cases} f(B) = B' \\ \text{dacă } P \in |BA, f(P) \in B'A' \end{cases}$$

$$P \in |BC, f(P) \in B'C' \quad \text{a.i. } \|BP\| = \|B'P'\| \text{ unde } P' = f(P)$$



Funcția astfel construită este o bijecție, întrucât la argumente \neq corespund valori \neq și \forall punct de pe $A'B'C'$ este imaginea unui singur punct din \widehat{ABC} (din axioma de construire a segmentelor).

Dacă $P, Q \in$ acestei semidrepte

$$\left. \begin{aligned} \|BP\| &= \|B'P'\| \\ \|BQ\| &= \|B'Q'\| \end{aligned} \right\} \Rightarrow \|PQ\| = \|BQ\| - \|BP\| = \|B'Q'\| - \|B'P'\| = \|P'Q'\| = \|f(P), f(Q)\|$$

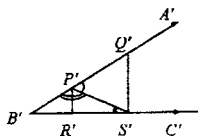
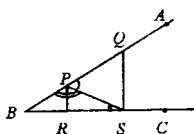
Dacă $P, Q \in$ la semidrepte \neq

$$\left. \begin{aligned} \|BP\| &= \|B'P'\| \\ \|BQ\| &= \|B'Q'\| \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle PBQ \equiv \triangle P'B'Q' \Rightarrow \|PQ\| = \|P'Q'\| = \|f(P), f(Q)\|$$

$$\widehat{PBQ} \equiv \widehat{P'B'Q'}$$

Reciproc:

Fie $f: \widehat{ABC} \rightarrow \widehat{A'B'C'}$ a.î. f bijectivă și $\|PQ\| = \|f(P), f(Q)\|$.



Fie $P, Q \in |BA$ și $RS \in |BC$

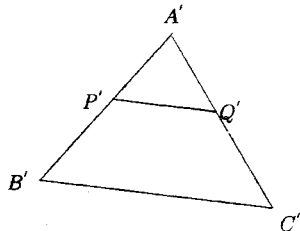
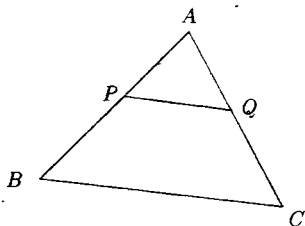
$$\left. \begin{aligned} \|PQ\| &= \|P'Q'\| \\ \|PS\| &= \|P'S'\| \\ \|QS\| &= \|Q'S'\| \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle PQS \equiv \triangle P'Q'S' \Rightarrow \widehat{QPS} \equiv \widehat{Q'P'S'} \Rightarrow \widehat{BPS} \equiv \widehat{B'P'S'} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \|PS\| &= \|P'S'\| \\ \|RP\| &= \|R'P'\| \\ \|PS\| &= \|P'S'\| \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle PRS \equiv \triangle P'R'S' \Rightarrow \widehat{PSB} \equiv \widehat{P'S'B'} \quad (2)$$

Din (1) și (2) $\Rightarrow \widehat{PBS} \equiv \widehat{P'B'S'}$ (ca dif. la 180°) adică $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$.

7) Dacă $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ atunci (\exists) o funcție bijectivă $f: ABC \rightarrow A'B'C'$ a.i. pt. (\forall) 2 puncte $P, Q \in ABC$, $\|PQ\| = \|f(P), f(Q)\|$ și reciproc.

Soluție:



Fie $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Construim o funcție $f: ABC \rightarrow A'B'C'$ a.i. $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$ și deci $P \in |AB| \rightarrow P' = f(P) \in |A'B'|$ a.i. $\|AP\| = \|A'P'\|$

$P \in |BC| \rightarrow P' = f(P) \in |B'C'|$ a.i. $\|BP\| = \|B'P'\|$

$P \in |CA| \rightarrow P' = f(P) \in |C'A'|$ a.i. $\|CP\| = \|C'P'\|$

Funcția astfel construită este bijectivă.

Fie $P \in |AB|$ și $Q \in |CA| \Rightarrow P' \in |A'B'|$ și $Q' \in |C'A'|$

$$\left. \begin{array}{l} \|AP\| = \|A'P'\| \\ \|CQ\| = \|C'Q'\| \\ \|CA\| = \|C'A'\| \end{array} \right\} \Rightarrow \|AQ\| = \|A'Q'\|; \hat{A} \equiv \hat{A}' \Rightarrow \triangle APQ \equiv \triangle A'P'Q' \Rightarrow \|PQ\| = \|P'Q'\|$$

Raționament analog pentru (\forall) punctele P și Q

Reciproc: se presupune că \exists o funcție bijectivă $f: ABC \rightarrow A'B'C'$ cu propriet. din enunț.

Se notează $f(A) = A''$, $f(B) = B''$, $f(C) = C''$ și rezultă \Rightarrow că $\|AB\| = \|A''B''\|$,

$\|BC\| = \|B''C''\|$, $\|AC\| = \|A''C''\| \Rightarrow \triangle ABC \equiv \triangle A''B''C''$

$$\begin{aligned} \text{Deoarece } f(ABC) &= f(|AB| \cup |BC| \cup |CA|) = f(|AB|) \cup f(|BC|) \cup f(|CA|) = \\ &= |A''B''| \cup |B''C''| \cup |C''A''| = A''B''C'' \end{aligned}$$

Dar prin ip. $f(ABC) = f(A'B'C')$ deci $\triangle A''B''C'' = \triangle A'B'C'$

$$\hat{=} \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$

8) Să se arate că dacă $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ atunci $[ABC] \sim [A'B'C']$.

Soluție:

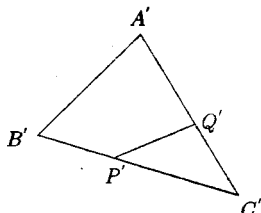
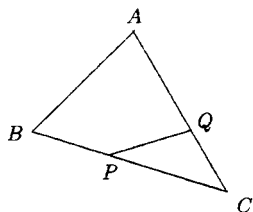
Dacă $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ atunci $(\exists) f: ABC \rightarrow A'B'C'$ și $k > 0$ a.î. $\|PQ\| = k\|f(P), f(Q)\|$,
 $P, Q \in ABC$

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{\|AB\|}{\|A'B'\|} &= \frac{\|BC\|}{\|B'C'\|} = \frac{\|CA\|}{\|C'A'\|} = k \\ \hat{A} &\equiv \hat{A'}; \hat{B} \equiv \hat{B'}; \hat{C} \equiv \hat{C'} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \|AB\| &= k\|A'B'\| \\ \|BC\| &= k\|B'C'\| \\ \|CA\| &= k\|C'A'\| \end{aligned}$$

Construim o funcție $f: ABC \rightarrow A'B'C'$ a.î. $f(A) = A'; f(B) = B'; f(C) = C'$

dacă $P \in \|BC\| \rightarrow P \in \|B'C'\|$ a.î. $\|BP\| = k\|B'P'\|$

dacă $P \in \|CA\| \rightarrow P \in \|C'A'\|$ a.î. $\|CP\| = k\|C'P'\|$; k — constantă de asemănare



Fie $P, Q \in AB$ a.î. $P \in \|BC\|, Q \in \|AC\| \Rightarrow P' \in \|B'C'\|$ și $\|BP\| = k\|B'P'\|$

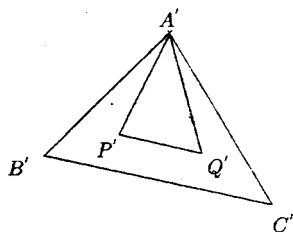
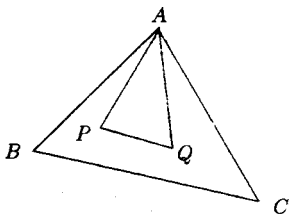
$Q' \in \|A'C'\|$ și $\|CQ\| = k\|C'Q'\|$ (1)

$$\begin{aligned} \text{Cum } \|BC\| &= k\|B'C'\| \Rightarrow \|PC\| = \|BC\| - \|BP\| = k\|B'C'\| - k\|B'P'\| = \\ &= k(\|B'C'\| - \|B'P'\|) = k\|P'C'\| \quad (2) \quad \hat{C} \equiv \hat{C'} \quad (3) \end{aligned}$$

Din (1), (2) și (3) $\Rightarrow \triangle PCQ \sim \triangle P'C'Q' \Rightarrow \|PQ\| = k\|P'Q'\|$

Raționament asemănător pentru $P, Q \in ABC$

Extindem funcția bijectivă construită anterior și la interioarele celor 2 triunghi: în felul următor:



Fie $P \in \text{int. } ABC$ și construim $P' \in \text{int. } A'B'C'$ a.î. $\|AP\| = k\|A'P'\|$.

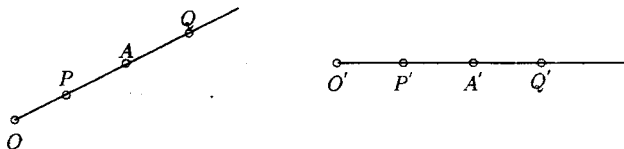
Fie $Q \in \text{int. } ABC \rightarrow Q' \in \text{int. } A'B'C'$ a.i. $\widehat{BAQ} \equiv \widehat{B'A'Q'}$ și $\|AQ\| = k\|A'Q'\|$ (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow \frac{\|AP\|}{\|A'P'\|} = \frac{\|AQ\|}{\|A'Q'\|} = k$, $\widehat{PAQ} \equiv \widehat{P'A'Q'} \Rightarrow \triangle APQ \sim \triangle A'P'Q' \Rightarrow$

$\|PQ\| = k\|P'Q'\|$, dar $P, Q \in [ABC]$ deci $[ABC] \sim [A'B'C']$

9) Să se arate că oricare două semidrepte sunt mulțimi congruente. Aceiași proprietate pentru drepte.

Soluție:

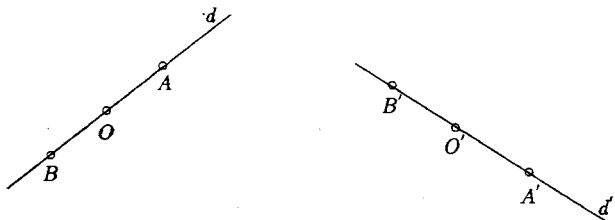


a) Fie $|OA$ și $|O'A'$ două semidrepte. Fie $f : |OA \rightarrow |O'A'$ a.i. $f(O) = O'$ și $f(P) = P'$ cu $\|OP\| = \|O'P'\|$. Punctul P' astfel construit este unic și deci dacă $P \neq Q \Rightarrow \|OP\| \neq \|OQ\| \Rightarrow \|O'P'\| \neq \|O'Q'\| \Rightarrow P' \neq Q'$ și $(\forall)P' \in |O'A' (\exists)$ un singur punct $P \in |OA$ a.i. $\|OP\| = \|O'P'\|$

Funcția construită este bijectivă.

Dacă $P, Q \in |OA$, $P \in |OQ| \rightarrow P'Q' \in |O'A'$ a.i. $\|OP\| = \|O'P'\|$; $\|OQ\| = \|O'Q'\| \Rightarrow \|PQ\| = \|OQ\| - \|OP\| = \|O'Q'\| - \|O'P'\| = \|P'Q'\| (\forall)P, Q \in |OA$
 \Rightarrow cele două semidrepte sunt congruente.

b) Fie două drepte d și d' .



Fie $O \in d$ și $O' \in d'$. Construiem o funcție $f : d \rightarrow d'$ a.i. $f(O) = O'$ și $f(|OA) = |O'A'$ și $f(|OB) = |O'B'$ ca la punctul anterior. Se arată la fel că f este bijectivă și că $\|PQ\| = \|P'Q'\|$

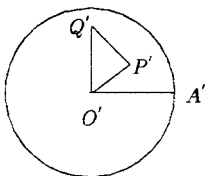
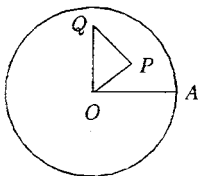
cînd P și Q aparțin aceleiași semidrepte. Dacă P, Q aparțin la semidrepte diferite:

$$\left. \begin{array}{l} \|OP\| = \|O'P'\| \\ \|OQ\| = \|O'Q'\| \end{array} \right\} \Rightarrow \|PQ\| = \|OP\| + \|OQ\| = \|O'P'\| + \|O'Q'\| = \|P'Q'\|$$

și deci cele două drepte sunt congruente.

10) Să se arate că două discuri avînd aceeași rază sunt mulțimi congruente.

Soluție:



Construim o funcție $f : D \rightarrow D'$

a.î: $f(O) = O', f(A) = A'$ și un

punct $(\forall) P \in D \rightarrow P' \in D'$

considerate în sens pozitiv. Din

ax. de construcție a segmentelor

și unghiurilor \Rightarrow că funcția astfel

construită este bijectivă, stabilind o corespondență biunivocă între elementele celor două mulțimi.

Fie $Q \in D \rightarrow Q' \in D'$ a.î. $\|OQ'\| = \|OQ\|$; $\widehat{AOQ} \equiv \widehat{A'O'Q'}$

Cum: $\|OP\| = \|O'P'\|$

$\|OQ\| = \|O'Q'\|$

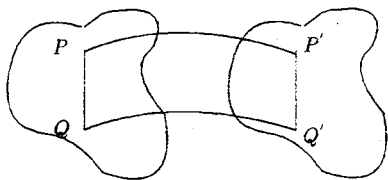
$\widehat{POQ} \equiv \widehat{P'O'Q'}$ (dif. de unghiuri congruente)

$$\left. \begin{array}{l} \|OP\| = \|O'P'\| \\ \|OQ\| = \|O'Q'\| \\ \widehat{POQ} \equiv \widehat{P'O'Q'} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OPQ \equiv \triangle O'P'Q' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|PQ\| = \|P'Q'\|, (\forall) P, Q \in D \Rightarrow D \equiv D'$$

11) Dacă funcția $f : M \rightarrow M'$ este o izometrie, atunci funcția inversă $f^{-1} : M' \rightarrow M$ este o asemenea izometrie.

Soluție:



$f : M \rightarrow M'$ este o izometrie $\Rightarrow f$ este bijectivă

și $(\forall) P, Q \in M$ avem $\|PQ\| = \|f(P), f(Q)\|$ f -

bijectivă $\Rightarrow f$ - inversabilă și f^{-1} - bijecție.

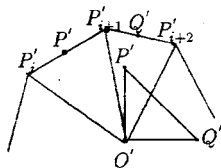
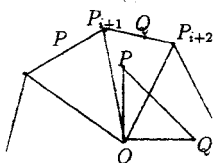
$$\left. \begin{aligned} \|P'Q'\| &= \|f(P); f(Q)\| = \|PQ\| \\ \|f^{-1}(P'); f^{-1}(Q')\| &= \|f^{-1}(f(P)); f^{-1}(f(Q))\| = \|PQ\| \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \|P'Q'\| = \|f^{-1}(P'), f^{-1}(Q')\|, (\forall) P', Q' \in M$, deci $f^{-1} : M' \rightarrow M$ este o izometrie.

12) Dacă poligoanele convexe $L = P_1, P_2, \dots, P_n$ și $L' = P'_1, P'_2, \dots, P'_n$ au $|P_i, P_{i+1}| \equiv |P'_i, P'_{i+1}|$ pentru $i = 1, 2, \dots, n-1$ și $\widehat{P_i P_{i+1} P_{i+2}} \equiv \widehat{P'_i P'_{i+1} P'_{i+2}} (\forall) i = 1, 2, \dots, n-2$ atunci $L \equiv L'$ și $[L] \equiv [L']$

Soluție:

Construim o funcție f a.i. $f(P_i) = P'_i, i = 1, 2, \dots, n$ și dacă $P \in |P_i, P_{i+1}|$



Funcția construită anterior o prelungim și la interiorul polygonului astfel: Fie $O \in \text{int.} L \rightarrow O' \in \text{int.} L'$ a.i. $\widehat{OP_i P_{i+1}} \equiv \widehat{O'P'_i P'_{i+1}}$ și $\|OP_i\| = \|O'P'_i\|$ aceste puncte le unim cu vîrfurile polygonului. Se demonstrează ușor că triunghiurile astfel obținute sunt congruente respectiv.

Construim funcția $g : [L] \rightarrow [L']$ a.i.

$$g(P) = \begin{cases} f(P), & \text{dacă } P \in L \\ O', & \text{dacă } P = O \\ P', & \text{dacă } P \in [P_i O P_{i+1}] \text{ a.i. } \widehat{P_i O P} \equiv \widehat{P'_i O' P'} (\forall) i = 1, 2, \dots, n-1 \end{cases}$$

Funcția astfel construită este bijectivă $(\forall) P, Q \in [L]$ se poate demonstreze prin congruența triunghiurilor POQ și $P'O'Q'$ că $\|PQ\| = \|P'Q'\|$ deci $[L] = [L']$

\Rightarrow DACĂ DOUĂ POLIGOANE CONVEXE SE DESCOMPUN ÎN ACELAȘI NUMĂR DE TRIUNGHIURI RESPECTIV CONGRUENTE, ELE SÎNT CONGRUENTE

13) Să se arate că raportul perimetrelor a două poligoane asemenea este egal cu raportul lor de asemănare.

Soluție:

$$L = P_1 P_2 \dots, P_n$$

$$L' = P'_1 P'_2 \dots, P'_n$$

$$L \sim L' \Rightarrow (\exists) K > 0 \text{ și } f: L \rightarrow L' \text{ a.î. } \|PQ\| = k \|f(P) f(Q)\| (\forall) P, Q \in L, \text{ iar } P'_i = f(P_i)$$

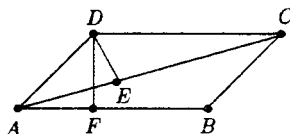
Luând succesiv în rolul lui P și Q vîrfurile obținem:

$$\left. \begin{array}{l} \|P_1 P_2\| = k \|P'_1 P'_2\| \Rightarrow \frac{\|P_1 P_2\|}{\|P'_1 P'_2\|} = k \\ \|P_2 P_3\| = k \|P'_2 P'_3\| \Rightarrow \frac{\|P_2 P_3\|}{\|P'_2 P'_3\|} = k \\ \vdots \\ \|P_{n-1} P_n\| = k \|P'_{n-1} P'_n\| \Rightarrow \frac{\|P_{n-1} P_n\|}{\|P'_{n-1} P'_n\|} = k \\ \|P_n P_1\| = k \|P'_n P'_1\| \Rightarrow \frac{\|P_n P_1\|}{\|P'_n P'_1\|} = k \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \frac{\|P_1 P_2\|}{\|P'_1 P'_2\|} = \frac{\|P_2 P_3\|}{\|P'_2 P'_3\|} = \dots = \frac{\|P_1 P_2\| + \|P_2 P_3\| + \dots + \|P_{n+1} P_n\| + \|P_n P_1\|}{\|P'_1 P'_2\| + \|P'_2 P'_3\| + \dots + \|P'_{n+1} P'_n\| + \|P'_n P'_1\|} = \frac{P}{P'}.$$

14) Paralelogramul ABCD are $\|AB\| = 6$, $\|AC\| = 7$ și $d(D, AC) = 2$. Să se afle $d(D, AB)$.

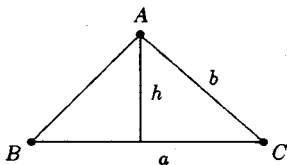
Soluție:



$$\begin{aligned} \sigma[ADC] &= \frac{2 \cdot 7}{2} = 7 \\ \sigma[ABCD] &= 2 \cdot 7 = 14 = 6 \|DF\| \\ \Rightarrow \|DF\| &= \frac{14}{6} = \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

15) Dintre triunghiurile ABC cu $\|BC\| = a$ și $\|CA\| = b$, a și b fiind numere date, să se afle un triunghi de arie maximă.

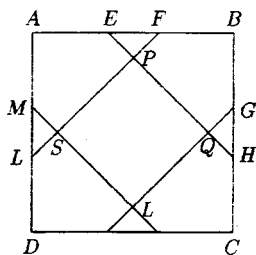
Soluție:



$$\begin{aligned} h &= b \cdot \sin C \leq b \\ \sigma[ABC] &= \frac{a \cdot h}{2} \text{ este max cînd } h \text{ este max.} \\ h \text{ max} &= b \text{ cînd } \sin C = 1 \\ \Rightarrow m(C) &= 90 \Rightarrow ABC \text{ este dr. în } C. \end{aligned}$$

16) Se consideră un pătrat $ABCD$ și punctele E, F, G, H, I, K, L, M care împart fiecare latură în trei segmente congruente. Să se arate că $PQRS$ este un pătrat și că aria lui este egală cu $\frac{2}{9}\sigma[ABCD]$.

Soluție:



$$\|MD\| = \|DI\| \Rightarrow MDI - \triangle \text{ tr. isoscel}$$

$$\Rightarrow m(\widehat{DMI}) = m(\widehat{MID}) = 45^\circ$$

$$\text{La fel } m(\widehat{FLA}) = m(\widehat{AFL}) = m(\widehat{BEH}) = m(\widehat{EHB}).$$

$$\|RK\| \Rightarrow \|SP\| = \|PQ\| = \|QR\| = \|RS\| \Rightarrow SRQP \text{ este pătrat.}$$

$$\|AB\| = a, \|AE\| = \frac{2a}{3}, \|MI\| = \sqrt{\frac{4a^2}{9} + \frac{4a^2}{9}} = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$$

$$2\|RI\|^2 = \frac{a^2}{9} \Rightarrow \|RI\|^2 = \frac{a^2}{18} \Rightarrow \|RI\| = \frac{a}{3\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{6}$$

$$\|SR\| = \frac{2a\sqrt{2}}{3} - 2\frac{a\sqrt{2}}{6} = \frac{a\sqrt{2}}{3};$$

$$\sigma[SRQP] = \frac{2a^2}{9} = \frac{2}{9}\sigma[ABCD]$$

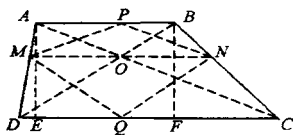
17) Diagonalele trapezului $ABCD$ ($AB \parallel DC$) se taie în O .

a) Să se arate că triunghiurile AOD și BOC au aceeași arie;

b) Paralela prin O la AB taie AD și BC în M și N . Să se arate că $\|MO\| = \|ON\|$.

Soluție:

a)



$$\left. \begin{aligned} \sigma[ACD] &= \frac{\|DC\| \cdot \|AE\|}{2} \\ \sigma[BCD] &= \frac{\|DC\| \cdot \|BF\|}{2} \\ \|AE\| &= \|BF\| \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma[ACD] = \sigma[BCD]$$

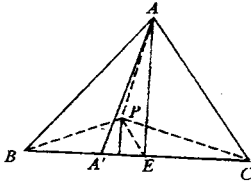
$$\left. \begin{aligned} \sigma[AOD] &= \sigma[ACD] - \sigma[COD] \\ \sigma[BOC] &= \sigma[BCD] - \sigma[COD] \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sigma[AOD] = \sigma[BOC]$$

$$= \frac{\|N'D\|}{2} \left(h_1 + \frac{\|EQ\|}{\|ND\|} \cdot h_2 \right) = \frac{\|N'D\|}{2} \cdot \left(h_1 + \frac{h_2}{h_1} \cdot h_2 \right) = \frac{\|N'D\|}{2h_1} [(h_1 - h_2)^2 + 2h_1h_2]$$

este minim cînd $h_1 = h_2 \Rightarrow D$ se află la mijlocul lui $|PQ|$. Construcția este deci: $\triangle ANM$ unde $NM \parallel EN'$. În acest caz avem $|ND| \equiv |DM|$.

20) Să se construiască un punct P în interiorul triunghiului ABC , a.i. triunghiurile PAB , PBC , PCA să aibe arii egale.

Soluție:



$$\sigma[ABC] = \frac{\|BC\| \cdot \|AA'\|}{2}$$

Fie mediana $|AE|$ și P centrul de greutate al triunghiului.

$$\text{Fie } PD \perp BC \quad \sigma[BPC] = \frac{\|BC\| \cdot \|PD\|}{2}$$

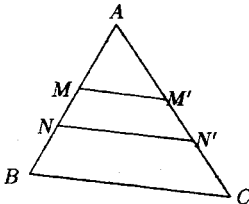
$$\left. \begin{array}{l} AA' \perp BC \\ PD \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow AA' \parallel PD \Rightarrow \triangle PDE \sim \triangle AA'E$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\|PD\|}{\|AA'\|} &= \frac{\|PE\|}{\|AE\|} = \frac{1}{3} \Rightarrow \|PD\| = \frac{\|AA'\|}{3} \Rightarrow \sigma[BPC] = \frac{\|BC\| \cdot \frac{\|AA'\|}{3}}{2} = \\ &= \frac{1}{3} \frac{\|BC\| \cdot \|AA'\|}{2} = \frac{1}{3} \sigma[ABC] \end{aligned}$$

La fel se demonstrează că $\sigma[PAC] = \sigma[PAB] = \frac{1}{3} \sigma[ABC]$ deci punctul este centrul de greutate.

21) Să se descompună o suprafață triunghiulară în trei suprafețe de aceeași arie, prin paralele la o latură a triunghiului.

Soluție:



Fie $M, N \in AB$ a.i. $M \in |AN|$

Ducem $MM' \parallel BC$

$$\begin{aligned} &MN' \parallel BC \\ \triangle AMM' &\sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{\sigma[AMM']}{\sigma[ABC]} = \left(\frac{\|AM\|}{\|AB\|} \right)^2 \end{aligned}$$

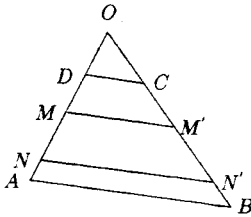
$$\sigma[AMM'] = \frac{1}{3} \sigma, \left(\frac{\|AM\|}{\|AB\|} \right)^2 = \frac{1}{3},$$

$$\|AM\| = \frac{\|AB\|}{\sqrt{3}}; \triangle ANN' \sim \triangle ABC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{\sigma[ANN']}{\sigma[ABC]} &= \left(\frac{\|AN\|}{\|AB\|} \right)^2 \\ \sigma[ANN'] &= \frac{2}{3} \sigma[ABC] \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left(\frac{\|AN\|}{\|AB\|} \right)^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow \|AN\| = \sqrt{\frac{2}{3}} \|AB\|$$

22) Rezolvați problema analoagă pentru un trapez.

Soluție:



$$\|OD\| = a, \|OA\| = b$$

$$\begin{aligned} \sigma[\triangle CM'M] &= \sigma[MM'N'N] = \sigma[N'N'BA] = \\ &= \frac{1}{3} \sigma[ABCD] \end{aligned}$$

$$\triangle ODC \sim \triangle OAB \rightarrow \frac{\sigma[ODC]}{\sigma[OAB]} = \frac{\|OD\|^2}{\|OA\|^2} = \frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma[ODC]}{\sigma[OAB] - \sigma[ODC]} = \frac{a^2}{b^2 - a^2} \Rightarrow \frac{\sigma[ODC]}{\sigma[ABCD]} = \frac{a^2}{b^2 - a^2} \quad (1)$$

$$\triangle ODC \sim \triangle OMM' \Rightarrow \frac{\sigma[ODC]}{\sigma[OMM']} = \left(\frac{\|OD\|}{\|OM\|} \right)^2 \Rightarrow \frac{\sigma[ODC]}{\sigma[OMM'] - \sigma[ODC]} = \frac{a^2}{\|OM\|^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma[ODC]}{\sigma[DCMM']} = \frac{a^2}{\|OM\|^2 - a^2} \Rightarrow \frac{\sigma[ODC]}{\frac{1}{3} \sigma[ABCD]} = \frac{a^2}{\|OM\|^2 - a^2} \quad (2)$$

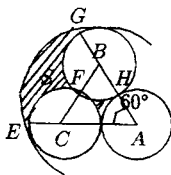
$$\triangle ONN' \sim \triangle ODC$$

$$\frac{\sigma[ODC]}{\sigma[DNN']} = \frac{\|OD\|}{\|ON\|} = \frac{a^2}{\|ON\|^2} \Rightarrow \frac{\sigma[ODC]}{\sigma[ONN'] - \sigma[ODC]} = \frac{a^2}{\|ON\|^2} \Rightarrow (3)$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma[ODC]}{\sigma[DCN'N]} = \frac{a^2}{\|ON\|^2 - a^2} \Rightarrow \frac{\sigma[ODC]}{\frac{2}{3} \sigma[ABCD]} = \frac{a^2}{\|ON\|^2 - a^2}$$

$$\text{împărțim (1) la (3): } \frac{2}{3} = \frac{\|ON\|^2 - a^2}{b^2 - a^2} \Rightarrow 3\|ON\|^2 - 3a^2 = 2b^2 - 2a^2 \Rightarrow \|ON\|^2 = \frac{a^2 + 2b^2}{3}$$

23) Prelungim razele duse la vîrfurile unui triunghi echilateral înscris într-un cerc $L(O, r)$, pînă la intersecția cu cercul care trece prin vîrfurile unui pătrat circumscris cercului $L(O, r)$. Să se arate că punctele astfel obținute sunt vîrfurile unui triunghi de aceeași arie cu hexagonul înscris în $L(O, r)$.



$$\sigma(s_1) = \sigma[ABC] - 3\sigma[\text{sect. } ADH]$$

$$\sigma[ABC] = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$$

$$\sigma[\text{sect. } ADH] = \frac{r^2}{2}m(\widehat{DH})$$

$$m(\widehat{DH}) = \frac{\pi}{180}m(\widehat{DH}) = \frac{\pi}{180} \cdot 60^\circ = \frac{\pi}{3}$$

$$\sigma[\text{sect. } ADH] = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi a^2}{2}$$

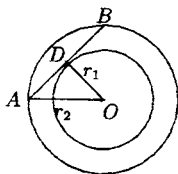
$$\sigma[s_1] = a^2\sqrt{3} - 3 \cdot \frac{\pi a^2}{6} = a^2\sqrt{3} - \frac{\pi a^2}{2} \quad (1)$$

$$\sigma[s_2] = \sigma[\text{sect. } AEG] - \sigma[ABC] - \sigma[\text{sect. } ECF] - \sigma[\text{sect. } GBF] = \frac{(3a)^2}{2} \cdot \frac{\pi}{180} \cdot 60 - a^2\sqrt{3} - \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{180} \cdot 120 - \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{180} \cdot 120 = \frac{9a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{3} - a^2\sqrt{3} - \frac{\pi a^2}{3} - \frac{\pi a^2}{3} = \frac{3\pi a^2}{2} - \frac{2\pi a^2}{3} - a^2\sqrt{3} \quad (2)$$

$$(1) \text{ și } (2) \Rightarrow \sigma[s_1] + \sigma[s_2] = \frac{3\pi a^2}{2} - \frac{2\pi a^2}{3} - \frac{\pi a^2}{2} = \frac{2\pi a^2}{6} = \frac{\pi a^2}{3}.$$

26) Să se arate că aria "coroanei circulare" cuprinse între cercurile $L(O, r_2)$ și $L(O, r_1)$ este egală cu aria unui disc avînd diametrul segmentul de tangentă la cercul $L(O, r_1)$ cu extremitățile pe cercul $L(O, r_2)$.

Soluție:



$$\|AD\|^2 = r_2^2 - r_1^2$$

$$\sigma[L(O, r_1)] = \pi r_1^2$$

$$\sigma[L(O, r_2)] = \pi r_2^2$$

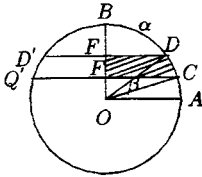
$$\sigma[\text{coroană circ.}] = \pi r_2^2 - \pi r_1^2 = \pi(r_2^2 - r_1^2) \quad (1)$$

$$\sigma[\text{disc. diam. } \|AB\|] = \pi \|AD\|^2 = \pi(r_2^2 - r_1^2) \quad (2)$$

$$(1); (2) \Rightarrow \sigma[\text{disc}] = \sigma[\text{coroană}]$$

27) Fie $[OA]$, $[OB]$ două raze \perp ale unui cerc de centru O . Pe arcul mic \widehat{ABF} se iau punctele C și D a.i. $\widehat{AC} \equiv \widehat{BD}$ și fie E, F proiecțiile lui CD pe OB . Să se arate că aria suprafeței marginite de $[DF]$, $[FE]$, $[EC]$ și arcul \widehat{CD} este egală cu aria sectorului determinat de arcul \widehat{CD} al cercului $C(O, \|OA\|)$.

Soluție:



$$\sigma[CDEF] = \frac{\sigma[CDD'C']}{2}$$

$$\sigma[CDD'C'] = \sigma_{\text{seg}}[CDBD'C'] - \sigma[\text{seg } DBD']$$

$$\text{Notăm: } m(\widehat{AC}) = m(\widehat{BD}) = \alpha \Rightarrow m(\widehat{CD}) = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$$

$$\sigma_{\text{sect.}} = \frac{r^2}{2}(\alpha - \sin \alpha)$$

$$\sigma_s[CDBD'C'] = \frac{r^2}{2}[\pi - 2\alpha - \sin(\pi - 2\alpha)] = \frac{r^2}{2}(\pi - 2\alpha - \sin 2\alpha)$$

$$\sigma_A = [DBD'] = \frac{r^2}{2}(2\alpha - \sin 2\alpha)$$

$$\begin{aligned} \sigma[CDD'C'] &= \sigma[CDBD'C'] - \sigma[DBD'] = \frac{r^2}{2}(\pi - 2\alpha - \sin 2\alpha) = \frac{r^2}{2}(2\alpha - \sin 2\alpha) = \\ &= \frac{r^2}{2}(\pi - 2\alpha - \sin 2\alpha - 2\alpha + \sin 2\alpha) = \frac{r^2}{2}(\pi - 4\alpha) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sigma[DCEF] = \frac{\sigma[CDD'C']}{2} = \frac{r^2}{4}(\pi - 4\alpha) = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) \quad (1)$$

$$\sigma[\text{sect } COD] = \frac{r^2}{2}m(\widehat{CD}) = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) \quad (2)$$

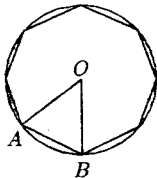
$$(1) \text{ și } (2) \Rightarrow \sigma[CDEF] = \sigma[\text{sect. } COD].$$

$$\|O_1F\| = \|OE\|$$

$$\sigma[\text{pătrat}] = \|DE\|^2 = \|OA\|^2 = \frac{bc}{2} = V[ABC]$$

28) Să se afle aria octogonului regulat înscris într-un cerc de rază r .

Soluție:



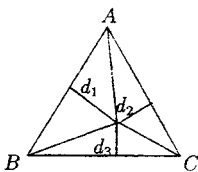
$$\mu(\widehat{AOB}) = \frac{\pi}{4}$$

$$\sigma[AOB] = \frac{r^2 \sin \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{r^2 \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{r^2 \sqrt{2}}{4}$$

$$\sigma(\text{ortogon}) = 8 \cdot \frac{r^2 \sqrt{2}}{4} = 2\sqrt{2}r^2$$

29) Să se arate, folosind arii, ca suma distanțelor unui punct variabil situat în interiorul triunghiului echilateral ABC la laturile lui este constant.

Soluție:



$$\sigma[ABC] = \sigma[AMB] + \sigma[AMC] + \sigma[MBC] \Rightarrow$$

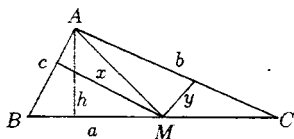
$$\Rightarrow ah_a = ad_3 + ad_2 + ad_1 \Rightarrow$$

$$d_1 + d_2 + d_3 = h_a \text{ (} a \text{ este latura } \triangle \text{ echilateral)}$$

$$\Rightarrow d_1 + d_2 + d_3 = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ (pt. că } h_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}).$$

30) Se consideră un triunghi dat ABC și un punct variabil $M \in [BC]$. Să se arate că între distanțele $x = d(M, AB)$ și $y = d(M, AC)$ există o relație de forma $kx + ly = 1$, unde k și l sunt constante.

Soluție:



$ABC - \triangle \text{ dat} \Rightarrow a, b, c, h$ sunt constante

$$\sigma[ABC] = \frac{ah}{2}$$

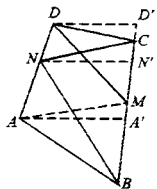
$$\sigma[ABC] = \sigma[AMB] + \sigma[AMC] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{ah}{2} = \frac{cx}{2} + \frac{by}{2} \Rightarrow cx + by = ab \Rightarrow \frac{c}{ah}x + \frac{b}{ah}y = 1 \Rightarrow kx + ly = 1$$

$$\text{unde } k = \frac{c}{ah} \text{ și } l = \frac{b}{ah}.$$

31) Fie M și N mijloacele laturilor $[BC]$ și $[AD]$ ale patrulaterului convex $ABCD$ și $\{P\} = AM \cap BN$ și $Q = CN \cap MD$. Să se arate că aria patrulaterului $PMQN$ este egală cu suma ariilor triunghiurilor ABP și CDQ .

Soluție:



Ducem $AA' \perp BC$; $NN' \perp BC$; $DD' \perp BC \Rightarrow$

$$\left. \begin{array}{l} AA' \parallel NN' \parallel DD' \\ \|AN\| = \|ND\| \end{array} \right\} \Rightarrow MN' \text{ linie mijlocie în trapezul } AA'D'D \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|NN'\| = \frac{\|AA'\| + \|DD'\|}{2}$$

$$\sigma[BCN] = \frac{\|BC\| \cdot \|NN'\|}{2}$$

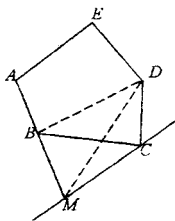
$$\sigma[BAM] + \sigma[MDC] = \frac{\|BM\| \cdot \|AA'\|}{2} + \frac{\|MC\| \cdot \|OD'\|}{2} \Rightarrow \|BM\| = \|MC\| = \frac{\|BC\|}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma[BAM] + \sigma[MDC] = \frac{\|BC\|}{2} \left(\frac{\|AA'\| + \|DD'\|}{2} \right) = \frac{\|BC\| \cdot \|NN'\|}{2} = \sigma[BCN]$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma[BCN] &= \sigma[PMQN] + \sigma[BPM] + \sigma[MQC] \\ \sigma[BCN] + \sigma[MDC] &= \sigma[BAP] + \sigma[BPM] + \sigma[MQC] + \sigma[CDQ] \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sigma[PMQN] = \sigma[BPA] + \sigma[CDQ].$$

31) Să se construiască un triunghi de aceeași arie cu un pentagon dat.

Soluție:



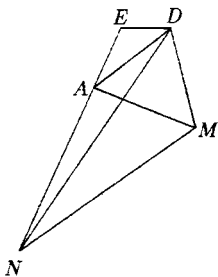
Se construiește întâi un patrulater care are aceeași arie cu pentagonul dat. Ducem prin C a paralelă la BD și prelungim $|AB|$ pînă intersectează paralela în M .

$$\sigma[ABCDE] = \sigma[ABDE] + \sigma[BCD],$$

$$\sigma[BCD] = \sigma[BDM] \text{ (au vîrfurile pe o paralelă la bază).}$$

Deci $\sigma[ABCDE] = \sigma[AMDE]$.

Apoi se consideră un triunghi care are aceeași arie cu patrulaterul $AMDE$.

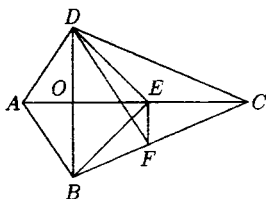


Ducem prin o paralelă la AD , N aparține intersecție cu aceeași paralelă

$$\sigma[AMDE] = \sigma[ADE] + \sigma[ADE] = \sigma[ADE] + \sigma[ADN] = \sigma[EDN]$$

32) Să se construiască o dreaptă care împarte o suprafață patrulateră convexă în două părți de aceeași arie.

Soluție:



$$\|AE\| = \|EC\|$$

$$\|EF\| \parallel BD \Rightarrow \sigma[BDF] = \sigma[BDE]$$

$$\sigma[ABFD] = \sigma[ABED] \quad (1)$$

$$\sigma[ADE] = \sigma[DEC] \text{ baze egale și aceeași înălțime}$$

$$\sigma[ABE] = \sigma[BEC]$$

$$\sigma[ABED] = \sigma[BEDC] \quad (2)$$

$\sigma[DEF] = \sigma[BEF]$ aceeași bază și virfurile pe drepte paralele la bază.

$$\sigma[DCF] \neq \sigma[DEC] + \sigma[ECF] + \sigma[DEF] \neq \sigma[DEC] + \sigma[ECF] + \sigma[BEF] = \sigma[BEDC] \quad (3)$$

$$(1), (2), (3) \Rightarrow \sigma[ABFD] = \sigma[DCF]$$

33) Într-un pătrat de latură 1 se unește mijlocul fiecărei laturi cu extremitățile laturi opuse.

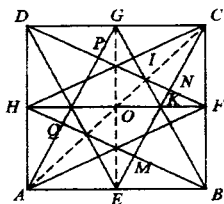
Să se afle aria octogonului interior convex care se formează în acest fel.

Soluție:

$$\left. \begin{array}{l} \triangle DCF \equiv \triangle CBE \Rightarrow \widehat{CFD} \equiv \widehat{CEB} \\ m(\widehat{CEB}) + m(\widehat{ECB}) = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow m(\widehat{CFN}) + m(\widehat{ECB}) = 90^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m(\widehat{CNF}) = 90^\circ \Rightarrow CE \perp DF$$

$$\left. \begin{array}{l} |CF| \equiv |EB| \\ m(\widehat{MBE}) = m(\widehat{NCF}) \\ m(\widehat{NEB}) + m(\widehat{CFN}) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle DCF \equiv \triangle BME \Rightarrow \left. \begin{array}{l} |CN| \equiv |MB| \\ |NF| \equiv |ME| \end{array} \right\}$$



Se arată la fel că:

$$\left. \begin{array}{l} |CN| \equiv |NB| \equiv |AQ| \equiv |DP| \\ |NF| \equiv |ME| \equiv |NQ| \equiv |PE| \\ |CE| \equiv |NB| \equiv |AG| \equiv |DF| \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |PN| \equiv |NM| \equiv |QM| \equiv |PQ|$$

$\Rightarrow MNPQ$ romb cu unghi drept $\Rightarrow MNPQ$ pătrat.

$$\left. \begin{array}{l} |DG| \equiv |FB| \\ \widehat{DIG} \equiv \widehat{FIB} \\ \widehat{GDI} \equiv \widehat{FBI} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle DGI \equiv \triangle DFI \Rightarrow \left. \begin{array}{l} |GI| \equiv |FI| \\ |GC| \equiv |CF| \\ |IC| \equiv |IC| \text{ com.} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle GIC \equiv \triangle FIC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \widehat{GCI} \equiv \widehat{FCI} \Rightarrow I \in |AC|$$

La fel se arată că toate vîrfurile octogonului aparțin axelor de simetrie ale pătratului, deci ortogonul este regulat.

$$\|CF\| = \frac{1}{2}, \|RF\| = \frac{1}{4}, \|CR\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

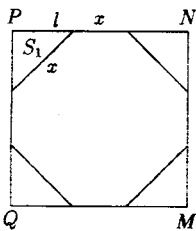
$$\|NF\| \cdot \frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \Rightarrow \|NF\| = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

$$\|EC\| = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\|BM\| \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} = 1 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \|BM\| = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\|MN\| = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{5-1-2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Consider separat pătratul



$$2l^2 = 2x^2$$

$$x = l\sqrt{2}$$

$$2l + l\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$l(2 + \sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow l = \frac{1}{\sqrt{5}(2 + \sqrt{2})}$$

$$\sigma[QMNP] = \frac{1}{5}$$

$$S_1 = \frac{x^2}{2}$$

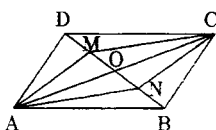
$$S = \sigma[QMNP] - 4S_1 = \frac{1}{5} - 2l^2 = \frac{1}{5} - 2 \cdot \frac{1}{5(6+4\sqrt{2})} = \frac{1}{5} - \frac{1}{5(3+2\sqrt{2})} =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{3+2\sqrt{2}-1}{3+2\sqrt{2}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{2(1+\sqrt{2})}{3+2\sqrt{2}} = \frac{2}{5} - \frac{(1+\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}{9-8} = \frac{2}{5}(3-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-4) =$$

$$= \frac{2}{5}(\sqrt{2}-1).$$

34) Diagonala $[BD]$ a paralelogramului $ABCD$ se împarte prin punctele M, N în 3 segmente. Să se arate că $AMCN$ este un paralelogram și să se calculeze raportul dintre $\sigma[AMCN]$ și $\sigma[ABCD]$.

Soluție:



$$\|OM\| = \|NM\| = \|NB\|$$

$$\|DC\| ? \Rightarrow \triangle MOC = \triangle NBA \Rightarrow \|MC\| = \|AN\|$$

$$\text{La fel se arată că } \triangle DAM = \triangle BCN \Rightarrow \|AM\| = \|NC\|$$

Deci $AMCN$ este paralelogram.

$$\sigma[AOB] = \frac{\|OA\| \cdot \|OB\| \sin \alpha}{2}$$

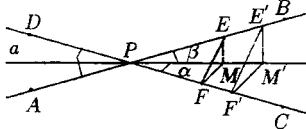
$$\sigma[AOD] = \frac{\|OA\| \cdot \|OD\| \sin(\pi - \alpha)}{2}$$

$$\begin{aligned} \sigma[ABCD] &= \|OA\| \cdot \|OB\| \sin \alpha + \|OA\| \cdot \|OD\| \sin \alpha = \|OA\| \cdot \sin \alpha (\|OA\| + \|OD\|) = \\ &= \|OA\| \cdot \|DB\| \cdot \sin \alpha \end{aligned}$$

$$\sigma[AMCN] = \|OA\| \cdot \|MN\| \sin \alpha = \|OA\| \cdot \frac{\|DB\|}{3} \sin \alpha = \frac{\sigma[ABCD]}{3} \Rightarrow \frac{\sigma[AMCN]}{\sigma[ABCD]} = \frac{1}{3}$$

35) Se dau punctele A, B, C, D astfel încît $AB \cap CD = \{p\}$. Să se afle locul geometric al punctului M astfel ca: $\sigma[ABM] = \sigma[CDM]$.

Soluție:



Pentru a determinăm unghiul α :

$$\sin \alpha = \frac{\|EM\|}{\|MP\|}, \sin \beta = \frac{\|MF\|}{\|PM\|}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\|EM\|}{\|MF\|} = k \Rightarrow \sin \alpha = k \sin(a - \alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = k \sin a \cos \alpha + k \cos a \sin \alpha$$

$$\text{Notez } t = \tan \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{2t}{1+t^2} = k \sin a \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} + k \frac{2t}{1+t^2} \cdot \cos a \Rightarrow kt^2 \cos a + 2(1-k \cos a) \cdot t -$$

$$-k \sin a = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{k \cos a - 1 \pm \sqrt{(k-1)^2 + 2k(1-\cos a)}}{k \cos a} \text{ deci am stabilit astfel pozițiile dreptelor locului geometric.}$$

$$\sigma[ABM] = \frac{\|AB\| \cdot \|ME\|}{2}$$

$$\sigma[CDM] = \frac{\|CD\| \cdot \|MF\|}{2}$$

$\sigma[ABM] = \sigma[CDM] \Rightarrow \|AB\| \cdot \|ME\| = \|CD\| \cdot \|MF\| \Rightarrow \frac{\|ME\|}{\|MF\|} = \frac{\|CD\|}{\|AB\|}$ constant pentru ca A, B, C, D - puncte fixe.

Trebuie deci găsit locul geometric al punctelor M astfel încât raportul distanțelor de la acest punct la două drepte concurente să fie constant.

$$\frac{\|ME\|}{\|MF\|} = k. \text{ Fie } M' \text{ încă un punct cu aceeași proprietate, adică}$$

$$\frac{\|M'E'\|}{\|M'F'\|} = k$$

$$\left. \begin{array}{l} ME \perp AB \\ M'E' \perp AB \\ MF \perp CD \\ M'F' \perp CD \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} ME \parallel M'E' \\ MF \parallel M'F' \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \widehat{EMF} \equiv \widehat{E'M'F'} \\ \frac{\|ME\|}{\|MF\|} = \frac{\|M'E'\|}{\|M'F'\|} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle MEF \sim \triangle M'E'F' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \widehat{FEM} \equiv \widehat{F'E'M'} \Rightarrow \widehat{PEF} \equiv \widehat{P'E'F'} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{\|PE\|}{\|PE'\|} = \frac{\|EF\|}{\|E'F'\|} \\ \text{dar } \frac{\|EF\|}{\|E'F'\|} = \frac{\|EM\|}{\|E'M'\|} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{\|PE\|}{\|PE'\|} = \frac{\|EM\|}{\|E'M'\|} \\ \widehat{PEM} \equiv \widehat{P'E'M'} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle PEM \sim \triangle P'E'M' \Rightarrow \widehat{EPM} \equiv \widehat{E'P'M'} \Rightarrow P, M, M' \text{ coliniare} \Rightarrow$$

locul geometric este o dreaptă ce trece prin P .

Când punctele se află în $\angle CPB$ se obține încă o dreaptă ce trece prin P . Deci locul geometric este format din două drepte concurente prin P , din care se scoate punctul P , întrucât distanțele de la P la ambele drepte sunt 0 și raportul lor este nedeterminat.

Reciproc, dacă punctele N și N' se află pe aceeași dreaptă ce trece prin P , raportul distanțelor lor la dreptele AB și CD este constant.

$$\left. \begin{array}{l} ME \parallel M'E' \Rightarrow \triangle PME \sim \triangle PM'E' \Rightarrow \frac{\|EM\|}{\|E'M'\|} = \frac{\|PM\|}{\|PM'\|} \\ MF \parallel M'F' \Rightarrow \triangle PMF \sim \triangle PM'F' \Rightarrow \frac{\|FM\|}{\|F'M'\|} = \frac{\|PM\|}{\|PM'\|} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\|EM\|}{\|E'M'\|} = \frac{\|FM\|}{\|F'M'\|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\|EM\|}{\|FM\|} = \frac{\|E'M'\|}{\|F'M'\|} = k$$

36) Problemă analogă în cazul $AB \parallel CD$.

Soluție:

Se arată la fel ca în problema precedentă că:

$$\frac{\|ME\|}{\|MF\|} = k \Rightarrow \frac{\|ME\|}{\|MF\| + \|ME\|} = \frac{k}{k+1} \Rightarrow$$

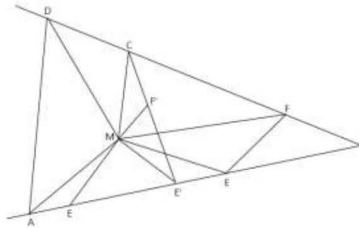
$\Rightarrow \|ME\| = \frac{kd}{k+1}$, iar locul geometric al punctelor care se află la o distanță constantă de o dreaptă dată este o paralelă la dreapta respectivă situată între cele două paralele.

Dacă $\|AB\| > \|CD\| \Rightarrow d(MAE) < d(MCD)$.

Atunci dacă $\frac{ME}{MF} = k \Rightarrow \frac{ME}{MF - ME} = \frac{k}{1-k} \Rightarrow \frac{ME}{d} = \frac{k}{1-k} \Rightarrow ME = \frac{kd}{1-k}$, deci se obține încă o paralelă la AB .

37) Fie $ABCD$ un patrulater convex. Să se afle locul geometric al punctului x_1 din interiorul $ABCD$ astfel încât $\sigma[ABM] + \sigma[CDM] = k$, k - o constantă. Pentru ce valori ale lui k locul geometric căutat nu este mulțimea vidă?

Soluția nr. 1



Presupunem că $ABCD$ nu este un paralelogram sau trapez. Fie $\{I\} = AB \cap CD$. Construiem $E \in (IA$ astfel încât $IE = AB$ și $F \in (IC$ a.i. $IF = CD$. Dacă M este un punct care verifică $\sigma[ABM] + \sigma[CDM] = 1$ (1), atunci, fiindcă $\sigma[ABM] = \sigma[MIE]$ și $\sigma[CDM] = \sigma[MIF]$, rezultă că $\sigma[MIE] + \sigma[MIF] = k$ (2).

Obținem că $\sigma[MEIF] = k$.

Pe de altă parte, punctele E, F sunt fixe, deci $\sigma[IEF] = k' = \text{const.}$ rezultă că $\sigma[MEF] = k - k' = \text{const.}$

Deoarece $EF = \text{const.}$, avem că $d(M, EF) = \frac{2(k-k')}{EF} = \text{const.}$, ceea ce arată că M aparține unei drepte paralele cu EF , dusă la distanța $\frac{2(k-k')}{EF}$.

Așa că, punctele locului geometric sunt cele de pe această dreaptă paralelă cu EF , aflate în interiorul patruterului $ABCD$. Ele aparțin segmentului $[E'F']$, v. figura.

Reciproc, dacă $M \in [E'F']$, atunci $\sigma[MAB] + \sigma[MCD] = \sigma[MIE] + \sigma[MIF] = \sigma[MEIF] = \sigma[IEF] + \sigma[MEP] = k' + \frac{EF \cdot 2(k-k')}{2 \cdot EF} = k$.

În concluzie, locul geometric al punctelor M din interiorul patruterului $ABCD$ pentru care are loc relația (1) unde k este o constantă pozitivă mai mică decât $S = \sigma[ABCD]$ este un segment de dreaptă.

Dacă $ABCD$ este un trapez de baze AB și CD , atunci se reface raționamentul și construcția pentru $AD \cap BC = \{I\}$ și $\sigma[MAD] + \sigma[MBC] = s - k = \text{const.}$

Observație. Dacă $ABCD$ este un paralelogram, se arată fără dificultate că locul geometric e un segment paralel la AB .

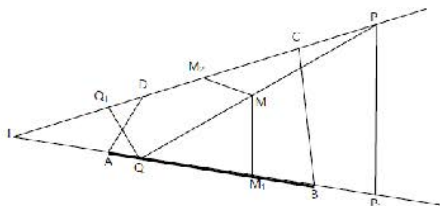
Soluția nr. 2 (Ion Fătrașcu)

Demonstrăm că locul geometric al punctelor M care verifică relația $\sigma[MAB] + \sigma[MCD] = k$ (1) din interiorul patruterului convex $ABCD$ de orice arie s ($k < s$) este un segment de dreaptă.

Să presupunem că $AB \cap CD = \{I\}$, vezi figura. Există un punct P al locului geometric ce aparține CD . Așadar, avem $(P, AB) = \frac{2k}{AB}$. De asemenea, există un punct $Q \in AB$ a.f.

$$d(Q, CD) = \frac{2k}{CD}.$$

Demonstrăm acum că punctele din interiorul patruterului $ABCD$ ce sunt pe segmentul $[PQ]$ aparțin locului geometric.



Fie $M \in \text{int}[ABCD] \cap [PQ]$. Notăm M_1 și M_2 proiecțiile lui M pe AB și respectiv CD . De asemenea, fie P_1 proiecțiile lui P pe AB și Q_1 proiecțiile lui Q pe CD . Triunghiurile PQ_1Q_1 și PMM_2 sunt asemenea, ceea ce înseamnă că

$$\frac{MM_2}{QQ_1} = \frac{MP}{PQ} \quad (2),$$

dar și triunghiurile MM_1Q și PP_1Q sunt asemenea, ceea ce înseamnă că

$$\frac{MM_1}{PP_1} = \frac{MQ}{PQ} \quad (3).$$

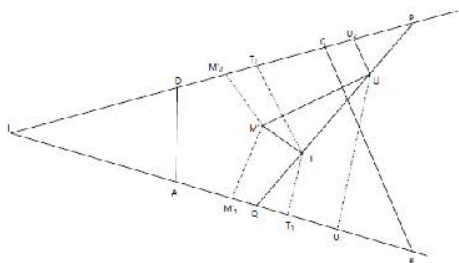
Prin adunarea membru cu membru a relațiilor (2) și (3), obținem că

$$\frac{MM_2}{QQ_1} + \frac{MM_1}{PP_1} = \frac{MP + MQ}{PQ} = 1 \quad (4).$$

Substituind în (4), $QQ_1 = \frac{2k}{CD}$ și $PP_1 = \frac{2k}{AB}$, rezultă $AB \cdot MM_1 + CD \cdot MM_2 = 2k$, adică $\sigma[MAB] + \sigma[MCD] = k$.

Demonstrăm acum prin reducere la absurd că nu există niciun punct în interiorul patrulaterului $ABCD$ nesituat pe segmentul $[PQ]$, construit cum am arătat, care să verifice relația (1).

Fie deci un punct M' în interiorul unui patrulater $ABCD$ care verifică relația (1), $M' \notin [PQ]$. Construim $M'T \cap AB$, $M'U \parallel CD$, unde T și U sunt situate pe $[PQ]$, vezi figura.



Notăm M'_1, T_1, U_1 proiecțiile lui M', T, U pe AB și M'_2, T_2, U_2 proiecțiile aceluiși punct pe CD .

Avem relațiile:

$$M'M'_1 \cdot AB + M'M'_2 \cdot CD = 2k \quad (5),$$

$$TT_1 \cdot AB + TT_2 \cdot CD = 2k \quad (6).$$

Deoarece $M'M'_1 = TT_1$ și $M'M'_2 = UU_2$, substituind în (5), obținem:

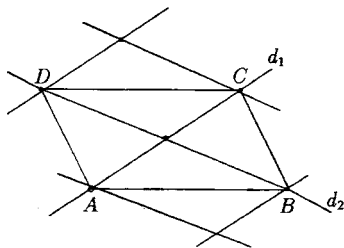
$$TT_1 \cdot AB + UU_2 \cdot CD = 2k \quad (7).$$

Din (6) și (7), obținem că $TT_2 = UU_2$, ceea ce conduce la $PQ \parallel CD$, fals!

Probleme de geometrie și trigonometrie

1) Să se găsească locul geometric al punctelor astfel încât suma distanțelor la două drepte concurente să fie constantă, egală cu l .

Soluție:



Fie d_1 și d_2 cele două drepte concurente. Ducem 2 drepte paralele cu d_1 situate de o parte și de alta a ei la distanța l . Acestea intersectează pe d_2 în D și B care vor fi puncte ale locului geometric căutat, întrunct suma distanțelor $d(B, d_1) + d(B, d_2) = l + 0$ verifică condiția din enunț.

Ducem două drepte paralele cu d_2 situate la distanța l de ea care taie pe d_1 în A și C care de asemenea sunt puncte ale locului geometric căutat. Paralele echidistante determină pe d_2

segmente congruente $\Rightarrow \begin{cases} |DO| \equiv |OB| \\ |AO| \equiv |OC| \end{cases}$ la fel deci ABCD este paralelogram.

$\left. \begin{aligned} \text{În } \triangle BOC, \quad \|CC'\| = d(C, d_2) = l \\ \|BB'\| = d(B, d_1) = l \end{aligned} \right\} \Rightarrow \|CC'\| = \|BB'\| \Rightarrow \triangle BOC \text{ este isoscel}$

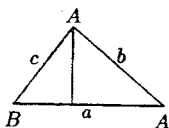
$\Rightarrow \|OC\| = \|OB\| \Rightarrow ABCD$ este dreptunghi. Orice punct M am lua de pe laturile acestui dreptunghi avem $\|R_1, d_1\| + \|M, d_2\| = l$, folosind proprietatea că suma distanțelor de la un punct de pe baza unui triunghi isoscel la laturi este constant și egal cu înălțimea ce pleacă dintr-un vîrf al bazei, adică l . Deci locul căutat este dreptunghiul ABCD.

2) Să se arate că în orice triunghi ABC avem:

a) $b \cos C + c \cos B = a$

b) $b \cos B + c \cos C = a \cos(B - C)$

Soluție:



$$\text{În } \triangle ABC : \cos B = \frac{\|BD\|}{c} \Rightarrow \|BD\| = c \cos B$$

$$\text{În } \triangle ADC : \cos C = \frac{\|DC\|}{b} \Rightarrow \|DC\| = b \cos C$$

$$\text{Deci } a = \|BD\| + \|DC\| = c \cos B + b \cos C$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = m \Rightarrow \begin{cases} b = m \sin B \\ c = m \sin C \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b \cos B + c \cos C &= m \sin B \cos B + m \sin C \cos C = \frac{m}{2} (2 \sin B \cos B + 2 \sin C \cos C) = \\ &= \frac{m}{2} (\sin 2B + \sin 2C) = \frac{m}{2} \cdot 2 \sin(B+C) \cos(B-C) = \frac{a}{\sin A} \sin(\pi - A) \cos(B-C) = \\ &= a \cos(B-C). \end{aligned}$$

3) Să se arate că între unghiurile triunghiului ABC avem:

$$a) \quad b \cos C - c \cos B = \frac{b^2 - a^2}{a}$$

$$b) \quad 2(bc \cos A + ac \cos B + ab \cos C) = a^2 + b^2 + c^2$$

Soluție:

$$a) \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \text{ și } \cos B = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ac}$$

$$\begin{aligned} b \cos C - c \cos B &= b \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} - c \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - a^2 - c^2 + b^2}{2a} = \\ &= \frac{2b^2 - 2c^2}{2a} = \frac{b^2 - c^2}{a} \end{aligned}$$

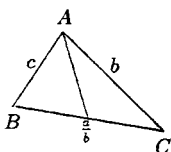
$$\begin{aligned} b) \quad \text{tot din teorema cosinusului} \Rightarrow 2bc \cos A + 2ac \cos B + 2ab \cos C &= 2bc \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \\ + 2ac \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + 2ab \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} &= b^2 + c^2 - a^2 + a^2 + c^2 - b^2 + a^2 + b^2 - c^2 = a^2 + b^2 + c^2 \end{aligned}$$

4) Folosind teorema cosinusului să se arate că:

$$4m_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2 \text{ unde } m_a \text{ este lungimea medianei corespunzătoare laturii de lungime } a.$$

Soluție:

$$m_a^2 = c^2 + \frac{a^2}{4} - 2 \cdot \frac{a}{2} c \cos B$$



$$\begin{aligned}
 4m_a^2 &= 4c^2 + a^2 - 4ac \cos B = 4c^2 + a^2 - \\
 -4ac \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} &= 4c^2 + a^2 - 2a^2 - 2c^2 + 2b^2 = \\
 &= 2c^2 + 2b^2 - a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2
 \end{aligned}$$

5) Să se arate că triunghiul ABC în care $\frac{a+c}{b} = \operatorname{ctg} \frac{B}{2}$ este dreptunghic.

Soluție:

$$\begin{aligned}
 \text{În teorema sinusului} \quad &\Rightarrow a = m \sin A \\
 \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = m &\Rightarrow b = m \sin B \\
 &c = m \sin C
 \end{aligned}$$

$$\frac{a+c}{b} = \frac{m \sin A + m \sin C}{m \sin B} = \frac{\sin A + \sin C}{\sin B} = \frac{2 \sin \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2}}{2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}} =$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}) \cos \frac{A-C}{2}}{\sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}} &= \frac{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{A-C}{2}}{\sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}} = \frac{\cos \frac{A-C}{2}}{\sin \frac{B}{2}} \\
 \operatorname{ctg} \frac{B}{2} &= \frac{\cos \frac{B}{2}}{\sin \frac{B}{2}}
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \cos \frac{A-C}{2} = \cos \frac{B}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{A-C}{2} = \frac{B}{2}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{A-C}{2} = -\frac{B}{2} &\Rightarrow A-B=C \text{ sau } A-C=B \Rightarrow \begin{array}{lll} A=B+C & 2A=180^\circ & A=90^\circ \\ \text{sau} & \Rightarrow & \text{sau} & \Rightarrow & \text{sau} \\ A+B=C & 2C=180^\circ & C=90^\circ \end{array}
 \end{aligned}$$

6) Să se arate că, dacă în trunghiui ABC avem $\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B = 2 \operatorname{ctg} C \Rightarrow a^2 + b^2 = 2c^2$

Soluție:

$$\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B = 2 \operatorname{ctg} C \Rightarrow \frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\cos B}{\sin B} = 2 \frac{\cos C}{\sin C}$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = m \Rightarrow \sin A = \frac{a}{m}, \sin B = \frac{b}{m}, \sin C = \frac{c}{m}; \text{ înlocuind obținem}$$

$$2c^2 = 2(a^2 + b^2 - c^2) \Rightarrow 2c^2 = a^2 + b^2$$

7) Să se determine elementele necunoscute ale triunghiului ABC fiind date:

a) A, B și p

b) $a + b = m, A$ și B

c) $a, A; b - c = \alpha$

Soluție:

$$\text{a) Folosind teorema sinusilor} \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a + b + c}{\sin A + \sin B + \sin C} = \frac{2p}{\sin A + \sin B + \sin C}$$

$$a = \frac{2p \sin A}{\sin A + \sin B + \sin C}; b = \frac{2p \sin B}{\sin A + \sin B + \sin C}; c = \frac{2p \sin C}{\sin A + \sin B + \sin C}$$

$$\text{iar } C = \pi - (A + B)$$

$$\text{b) } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{a + b}{\sin A + \sin B} = \frac{m}{\sin A + \sin B} \Rightarrow a = \frac{m \sin A}{\sin A + \sin B}$$

$$b = \frac{m \sin B}{\sin A + \sin B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{a \sin(A + B)}{\sin A} \text{ dar } \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\text{c) } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}; \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin B} = \frac{b - c}{\sin B - \sin C} = \frac{d}{\sin B - \sin C} = \frac{a}{\sin A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin B - \sin C = \frac{d \sin A}{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \sin \frac{B - C}{2} \cos \frac{B + C}{2} = \frac{d \sin A}{a}$$

$$B + C = \pi - A \Rightarrow \frac{B + C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \Rightarrow \cos \frac{B + C}{2} = \sin \frac{A}{2}$$

Deci:

$$2 \sin \frac{B-C}{2} \sin \frac{A}{2} = \frac{d}{a} 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \Rightarrow \sin \frac{B-C}{2} = \frac{d}{a} \cos \frac{A}{2}$$

Se rezolvă sistemul, se află B și C . Apoi se află $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$ și $c = b - d$.

8) Să se arate că în orice triunghiul ABC avem

$$\operatorname{tg} \frac{A-B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{a-b}{a+b} \quad (\text{teorema tangențelor})$$

Soluție:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = m \Rightarrow \begin{aligned} a &= m \sin A \\ b &= m \sin B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{a-b}{a+b} &= \frac{m \sin A - m \sin B}{m \sin A + m \sin B} = \frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} = \frac{2 \sin \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2}}{2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}} = \\ &= \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} \frac{\sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{C}{2}} = \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} \end{aligned}$$

9) În triunghiul ABC se dă $\hat{A} = 60^\circ$ și $\frac{b}{c} = 2 + \sqrt{3}$. Să se calculeze $\operatorname{tg} \frac{B-C}{2}$ și unghiurile B și C .

Soluție:

Folosind teorema tangențelor

$$\frac{b-c}{b+c} = \operatorname{tg} \frac{B-C}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2}$$

$$\hat{A} \in 60^\circ \Rightarrow m\left(\frac{A}{2}\right) = 30^\circ \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

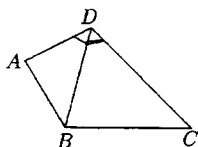
$$\frac{b}{c} = \frac{2+\sqrt{3}}{1} \Rightarrow \frac{b-c}{b+c} = \frac{2+\sqrt{3}-1}{2+\sqrt{3}+1} = \frac{1+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{B-C}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 1 \Rightarrow \mu\left(\frac{B-C}{2}\right) = 45^\circ \Rightarrow \begin{cases} B-C = 90^\circ \\ B+C = 120^\circ \end{cases}$$

$$2B = 210^\circ \Rightarrow \mu(B) = 105^\circ \Rightarrow \mu(C) = 120^\circ - 105^\circ = 15^\circ \text{ deci } \mu(C) = \frac{\pi}{12} \text{ și } \mu(B) = \frac{7\pi}{12}.$$

10) Într-un patrulater convex $ABCD$ se dau $\|AD\| = 7(\sqrt{6} - \sqrt{2})$, $\|CD\| = 13$, $\|BC\| = 15$, $C = \arccos \frac{33}{65}$ și $D = \frac{\pi}{4} + \arccos \frac{5}{13}$. Se cer celelalte unghiuri ale patrulaterului și $\|AB\|$.

Soluție:



$$\begin{aligned}\|BD\|^2 &= 13^2 - 15^2 - 2 \cdot 13 \cdot 15 \cos C = 13^2 + 15^2 - 2 \cdot 13 \cdot 15 \frac{33}{65} = \\ &= 13^2 + 15^2 - 2 \cdot 13 \cdot 15 \cdot \frac{3 \cdot 11}{13 \cdot 5} = 13^2 + 15^2 - 18 \cdot 11 = 196 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \|BD\| = 14\end{aligned}$$

În $\triangle BDC$ avem:

$$\frac{14}{\sin C} = \frac{15}{\sin \widehat{BDC}} \Rightarrow \sin \widehat{BDC} = \frac{15 \cdot \sin C}{14}$$

$$\sin C = \sqrt{1 - \frac{33^2}{65^2}} = \sqrt{\frac{(65 - 33)(65 + 33)}{65^2}} = \sqrt{\frac{2^6 \cdot 7^2}{65^2}} = \frac{56}{65}$$

$$\sin \widehat{BDC} = \frac{15 \cdot \frac{56}{65}}{14} = \frac{15 \cdot 56}{14 \cdot 65} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 14 \cdot 4}{14 \cdot 5 \cdot 13} = \frac{12}{13}$$

$$\cos 2\widehat{BDC} = \sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \sqrt{\frac{169 - 144}{169}} = \frac{5}{13}$$

$$\sin \widehat{BDC} = \arccos \frac{5}{13}$$

$$\sin \widehat{ADB} = \frac{\pi}{4} + \arccos \frac{5}{13} - \arccos \frac{5}{13} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\begin{aligned}\text{În } \triangle ADB \Rightarrow \|AB\|^2 &= 49(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 + 14^2 - 2 \cdot 14 \cdot 7(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \frac{\sqrt{2}}{2} = 49(6 + 2 - 2\sqrt{2}) + \\ &+ 196 - 93(\sqrt{2} - 2) = 98(4 - \sqrt{12}) - 98(\sqrt{12} - 2) + 196 = 98(4 - \sqrt{12} - \sqrt{12} + 2) + 196 = \\ &= 196(3 - \sqrt{12}) + 196 = 196(4 - 2\sqrt{3}) = 196(\sqrt{3} - 1)^2,\end{aligned}$$

$$\|AB\| = 14(\sqrt{3} - 1)$$

În $\triangle ADB$ aplicăm teorema sinusurilor:

$$\frac{\|AD\|}{\sin \widehat{ABD}} = \frac{\|AB\|}{\sin \frac{\pi}{4}} \Rightarrow \frac{7(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{\sin \widehat{ABD}} = \frac{14(\sqrt{3} - 1)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{28(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{2}}$$

$$\sin ABD = \frac{7(\sqrt{1}-2)}{28(\sqrt{3}-1)} = \frac{14(\sqrt{3}-1)}{28(\sqrt{3}-1)} = \frac{1}{2} = \mu(\widehat{ABD}) = \frac{\pi}{6}$$

$$\mu(A) = A - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = \frac{12\pi - 2\pi - 3\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}$$

$$\mu(D) = 2\pi - \frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{4} - \arccos \frac{5}{13} - \arccos \frac{33}{65} = \frac{14\pi}{12} - (\underbrace{\arccos \frac{5}{13}}_{\alpha} + \underbrace{\arccos \frac{33}{65}}_{\beta})$$

$$\cos \alpha = \frac{5}{13} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{12}{13}$$

$$\cos \beta = \frac{33}{65} \Rightarrow \sin \beta = \frac{56}{65}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{5}{13} \cdot \frac{33}{65} - \frac{12}{13} \cdot \frac{56}{65} = -\frac{507}{13 \cdot 65} = -\frac{3 \cdot 13^2}{13 \cdot 13 \cdot 5} = -\frac{3}{5}$$

$$\alpha + \beta = \pi - \arccos \frac{3}{5}$$

$$\mu(D) = \frac{14\pi}{12} - \pi + \arccos \frac{3}{5} = \frac{2\pi}{12} + \arccos 35 = \frac{\pi}{6} + \arccos 35$$

Sau se află $\mu(\widehat{DBC})$ și se adună cu $\frac{\pi}{6}$.

11) Să se calculeze aria $\triangle ABC$ atunci cînd:

a) $a = 17, B = \arcsin \frac{24}{25}, C = \arcsin \frac{12}{13}$

b) $b = 2, \hat{A} \in 135^\circ, \hat{C} \in 30^\circ$

c) $a = 7, b = 5, c = 6$

d) $\hat{A} \in 18^\circ, b = 4, c = 6$

Soluție:

a) $B = \arcsin \frac{24}{25} \Rightarrow \sin B = \frac{24}{25} \Rightarrow \cos B = \frac{7}{25}$

$C = \arcsin \frac{12}{13} \Rightarrow \sin C = \frac{12}{13} \Rightarrow \cos C = \frac{5}{13}$

$$\begin{aligned} \sin A &= \sin[\pi - (B + C)] = \sin(B + C) = \sin B \cos C + \sin C \cos B = \frac{24}{25} \cdot \frac{5}{13} + \frac{12}{13} \cdot \frac{7}{25} = \\ &= \frac{120 + 84}{325} = \frac{204}{325} \end{aligned}$$

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A} = \frac{289 \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{12}{13}}{2 \cdot \frac{204}{325}}$$

$$b) b = 2, \hat{A} \in 135^\circ, \hat{C} \in 30^\circ \Rightarrow \hat{B} \in 15^\circ$$

$$\sin A = \sin 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin C = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \sin B = \sin \frac{30^\circ}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{2+1}{2}} - \sqrt{\frac{2-1}{2}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{\frac{1}{2}} \right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$S = \frac{b^2 \sin A \sin C}{2 \sin B} = \frac{4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{2}$$

$$d) \hat{A} \in 18^\circ, b = 4, c = 6$$

$$\mu(A) = \frac{\pi}{10} 0$$

$$2\hat{A} = 36^\circ, 3\hat{A} \in 54^\circ$$

$$\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$$

$$\sin 30^\circ = \cos 54^\circ \Rightarrow \sin 2A = \cos 3A \Rightarrow 2 \sin A \cos A = \cos(4 \cos^2 A - 3) \Rightarrow$$

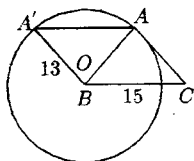
$$\Rightarrow 4 \sin^2 A + 2 \sin A - 1 = 0$$

$$\sin A = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{8} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

$$\sin A = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \text{ într-uncît } m(A) < 180 \text{ și } \sin A > 0$$

12) Cite triunghiuri distincte sub aspect simetric există astfel încît $a = 15$, $c = 13$, $s = 24$

Soluție:



$$\begin{aligned}\frac{ac \sin B}{2} &= 24 \Rightarrow \sin B = \frac{48}{15 \cdot 13} = \frac{16}{65} \\ \cos B &= \sqrt{1 - \frac{16^2}{65^2}} = \sqrt{\frac{(65-16)(65+16)}{65^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{49 \cdot 81}{65^2}} = \frac{7 \cdot 9}{65} = \frac{63}{65}\end{aligned}$$

$$b^2 = 13^2 + 15^2 - 2 \cdot 13 \cdot 15 \cdot \frac{7 \cdot 9}{13 \cdot 5} = 13^2 + 15^2 - 376 = 394 - 378 = 16,$$

$$b = 4$$

$$b^2 = 13^2 + 15^2 + 2 \cdot 13 \cdot 15 \cdot \frac{7 \cdot 9}{13 \cdot 5} = 394 + 378 = 772 = 4 \cdot 193$$

$$b = 2\sqrt{193}.$$

13) Să se afle aria $\triangle ABC$, dacă $a = \sqrt{6}$, $\hat{A} \in 60^\circ$, $b + c = 3 + \sqrt{3}$.

Soluție:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow 6 = b^2 + c^2 - 2bc \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} 6 &= (b+c)^2 - 2bc - bc = (b+c)^2 - 3bc \\ b+c &= 3 + \sqrt{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (3 + \sqrt{3})^2 - 3bc = 6$$

$$9 + 6\sqrt{3} + 3 - 3bc = 6 \Rightarrow 2(1 + \sqrt{3}) = bc$$

$$\left. \begin{aligned} b+c &= 3 + \sqrt{3} \\ bc &= 2 + 2\sqrt{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow x^2 - 5x + p = 0 \Rightarrow x^2 - (3 + \sqrt{3})x + 2 + 2\sqrt{3} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{3 + \sqrt{3} \pm \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}{2} = \frac{3 + \sqrt{3} \pm \sqrt{(3-1)^2}}{2} = \frac{3 + \sqrt{3} \pm (\sqrt{3} - 1)}{2} \Rightarrow$$

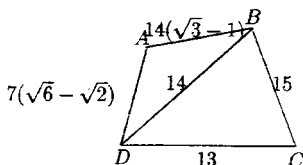
$$\begin{aligned}\Rightarrow x_1 &= 1 + \sqrt{3} \\ x_2 &= 2\end{aligned}$$

Deci $b = 1 + \sqrt{3}$ și $c = 2$ sau $b = 2$ și $c = 1 + \sqrt{3}$

$$2p = \sqrt{6} + 1 + \sqrt{3} + 2 = 3 + \sqrt{3} + 2 = 3 + \sqrt{3} + \sqrt{6} \Rightarrow p = \frac{3 + \sqrt{3} + \sqrt{6}}{2}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

- 14) Să se afle aria patrulaterului din problema 9.



$$\|AD\| = 7(\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

$$\|CD\| = 13, \quad \|BC\| = 15$$

La problema 9 s-a aflat

$$\|BD\| = 14, \quad \|AB\| = 14(\sqrt{3} - 1)$$

Se află cu formula lui Heron aria fiecărui triunghi și se adună

$$\sigma[ABCD] = \sigma[ABD] + \sigma[BDC]$$

- 15) Dacă S_n este aria poligonului regulat cu n laturi, să se calculeze: $S_3; S_4; S_6; S_8; S_{12}; S_{20}$ în funcție de R , raza cercului circumscris poligonului.

Soluție:

$$S_n = \frac{n}{2} R^2 \sin \frac{2\pi}{n} \text{ formula pentru aria poligonului regulat.}$$

$$n = 3 \Rightarrow S_3 = \frac{3}{2} R^2 \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$$

$$n = 4 \Rightarrow S_4 = \frac{4}{2} R^2 \sin \frac{2\pi}{4} = 2R^2$$

$$n = 6 \Rightarrow S_6 = \frac{6}{2} R^2 \sin \frac{2\pi}{6} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{2}$$

$$n = 8 \Rightarrow S_8 = \frac{8}{2} R^2 \sin \frac{2\pi}{8} = 2\sqrt{2}R^2$$

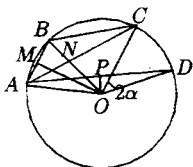
$$n = 12 \Rightarrow S_{12} = \frac{12}{2} R^2 \sin \frac{2\pi}{12} = 3R^2$$

$$n = 20 \Rightarrow S_{20} = \frac{20}{2} R^2 \sin \frac{2\pi}{20} = 10R^2 \frac{\sqrt{5} - 1}{4} = \frac{5}{2}(\sqrt{5} - 1)R^2$$

- 16) Să se calculeze aria poligonului regulat $ABCD \dots M$ înscris în cercul de rază R , știind că:

$$\frac{1}{\|AB\|} = \frac{1}{\|AC\|} + \frac{1}{\|AD\|}.$$

Soluție:



$$m(\widehat{AB}) = 2d \Rightarrow m(\widehat{AOB}) = 2d$$

În $\triangle BOM$

$$\sin \alpha = \frac{\|BM\|}{\|BO\|} \Rightarrow \|BM\| = R \sin \alpha$$

$$\|AB\| = 2R \sin \alpha \quad (1)$$

$$\text{În } \triangle NOC : \sin 2\alpha = \frac{\|NC\|}{\|OC\|} \Rightarrow \|NC\| = R \sin 2\alpha \Rightarrow \|AC\| = 2R\alpha \quad (2)$$

$$\text{În } \triangle POD : \sin 3\alpha = \frac{\|DP\|}{\|OD\|} \Rightarrow \|DP\| = R \sin 3\alpha$$

$$\|AD\| = 2R \sin 3\alpha \quad (3)$$

Înlocuind (1), (2), (3) în relația dată:

$$\frac{1}{2R \sin \alpha} = \frac{1}{2R \sin 2\alpha} = \frac{1}{2R \sin 3\alpha} \Rightarrow \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{\sin 3\alpha}$$

$$\frac{1}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin 3\alpha} \Rightarrow \frac{1}{\sin 2\alpha} = \frac{\sin 3\alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha \cdot \sin 3\alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cdot \cos 2\alpha}{\sin \alpha \cdot \sin 3\alpha} \Rightarrow 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha =$$

$$= \sin 3\alpha \Rightarrow \sin 4\alpha = \sin 3\alpha \Rightarrow \sin 4\alpha - \sin 3\alpha = 0 \Rightarrow 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{7\alpha}{2} = 0 \Leftrightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = 0 \text{ sau}$$

$$\cos \frac{7\alpha}{2} = 0.$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0 \text{ imposibil}$$

$$\cos \frac{7\alpha}{2} = 0 \Rightarrow \frac{7\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{7} \Rightarrow m(\widehat{AB}) = \frac{2\pi}{7}$$

$$n = \frac{m(\text{cerc întreg})}{m(\widehat{AB})} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{7}} = 7.$$

Deci poligonul are 7 laturi.

$$S_7 = \frac{7}{2} R^2 \sin \frac{2\pi}{7}$$

17) Să se arate că în orice triunghi ABC avem:

$$a) r = (p - a) \operatorname{tg} \frac{A}{2};$$

$$b) S = (p - a) \operatorname{tg} \frac{A}{2};$$

$$c) p = 4R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

$$d) p - a = 4R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$e) m_a^2 = R^2(\sin^2 A + 4 \cos A \sin B \sin C)$$

$$f) h_a = 2R \sin B \sin C$$

Soluție:

$$a) \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

$$\begin{aligned} (p-a) \operatorname{tg} \frac{A}{2} &= (p-a) \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = \sqrt{\frac{(p-a)^2(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = \\ &= \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2}} = \frac{9}{p} = r \end{aligned}$$

$$b) \frac{S}{p} = (p-a) \operatorname{tg} \frac{A}{2} \Rightarrow S = p(p-a) \operatorname{tg} \frac{A}{2}$$

$$c) \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}, \cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}, \cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}, R = \frac{abc}{4S} \Rightarrow 4R = \frac{abc}{S}$$

$$\begin{aligned} 4R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} &= \frac{abc}{S} \cdot \sqrt{\frac{p^3(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2b^2c^2}} = \frac{abc}{S} \sqrt{\frac{p^3(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}} = \frac{abc}{S} \\ \frac{pS}{abc} &= p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) 4R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} &= \frac{abc}{S} \cdot \sqrt{\frac{p(p-a)^3(p-b)(p-c)}{bcacab}} = \frac{abc}{S} \cdot \frac{p-a}{abc} \\ S &= p-a \end{aligned}$$

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$R^2(\sin^2 A + 4 \cos A \sin B \sin C) = R^2 \left(\frac{a^2}{4R^2} + 4 \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \cdot \frac{b}{2R} \cdot \frac{c}{2R} \right) =$$

$$= R^2 \frac{a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2a^2}{4R^2} = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} = \mu_a^2$$

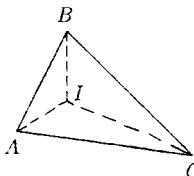
$$f) S = \frac{ah_a}{2} \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a}, R = \frac{abc}{4S}, \frac{b}{2R} = \sin B, \frac{c}{2a} = \sin C$$

$$2R \sin B \sin C = 2R \cdot \frac{b}{2R} \cdot \frac{c}{2R} = \frac{bc}{2R} = \frac{bc}{2 \cdot \frac{abc}{4S}} = \frac{bc}{\frac{abc}{2S}} = \frac{2bcS}{abc} = \frac{2S}{a} = h_a$$

17) Dacă I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC să se arate că

$$\|AI\| = 4R \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

Soluție:



Aplicăm teorema sinusurilor în $\triangle ABI$:

$$\frac{\|AI\|}{\sin \frac{B}{2}} = \frac{\|BI\|}{\sin \frac{A}{2}} = \frac{\|AB\|}{\sin \widehat{BIA}}$$

$$m(\widehat{BIA}) = 180^\circ - \frac{A+B}{2} = 180^\circ - 90^\circ + \frac{C}{2} = 90^\circ + \frac{C}{2}$$

$$\sin \widehat{BIA} = \sin(90^\circ + \frac{C}{2}) = \sin(180^\circ - 90^\circ - \frac{C}{2}) = \sin(90^\circ - \frac{C}{2}) = \cos \frac{C}{2}$$

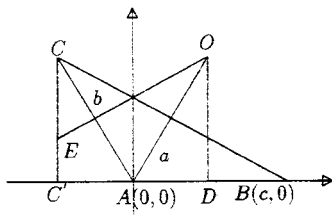
Teorema sinusurilor aplicată în $\triangle ABC$

$$\frac{\|AB\|}{\sin C} = 2R \Rightarrow \|AB\| = 2R \sin C = 4R \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} \sin \frac{B}{2}$$

$$\frac{1}{\cos \frac{C}{2}} = 4R \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

18) Să se demonstreze teorema sinusurilor utilizând metoda analitică

Soluție:



$$\text{În } \triangle ACC': \sin(180^\circ - A) = \frac{\|CC'\|}{b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|CC'\| = b \sin A; \cos(180^\circ - A) = b \cos A.$$

Deci coordonatele lui C sunt $(-b \cos A, b \sin A)$

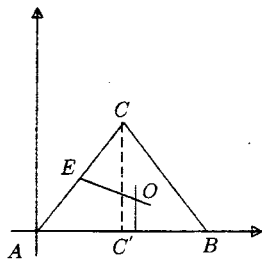
Centrul cercului circumscris se află la intersecția perpendicularelor duse prin mijlcurile laturilor AB și AC .

$$m_{EO} = -\frac{1}{m_{AC}} = \frac{1}{\operatorname{tg} A} = \operatorname{ctg} A$$

$$E\left(\frac{O - b \cos A}{2}, \frac{O + b \sin A}{2}\right) = E\left(-\frac{b \cos A}{2}, \frac{b \sin A}{2}\right)$$

$$\text{Ecuația dreptei } EO : y - y_0 = m(\lambda - x_0) \Rightarrow y - \frac{b \sin A}{2} = \operatorname{ctg} A \left(x + \frac{b \cos A}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} R = \|OA\| &= \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2 \sin A} + \frac{c \cos A}{2 \sin A}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^2}{4} \cdot \frac{1}{\sin^2 A} + 2 \cdot \frac{bc \cos A}{4 \sin^2 A} + \frac{c^2}{4} \cdot \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}} = \\ &= \sqrt{\frac{c^2}{4} \left(1 + \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}\right) + \frac{1}{4 \sin^2 A} (b^2 + 2bc \cos A)} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{4 \sin^2 A} (c^2 + b^2 + 2bc \cos A)} = \sqrt{\frac{a^2}{4 \sin^2 A}} = \\ &= \frac{a}{2 \sin A} \Rightarrow R = \frac{a}{2 \sin A} \end{aligned}$$



Calculul refăcut pentru același desen dă:

$$(b \cos A, b \sin A)$$

$$m_{AC} = \operatorname{tg} A \Rightarrow m_{OE} = -\frac{1}{\operatorname{tg} A}$$

$$(OE) : 2 \sin A = -2x \cos A + B$$

$$O\left(\frac{c}{2}, \frac{-c \cos A + b}{2 \sin A}\right) \text{ și } \|OA\| = R = \\ = \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^2 + c^2 \cos A - 2bc \cos A}{4 \sin^2 A}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4 \sin^2 A} \cdot (c^2 \sin^2 A + c^2 \cos^2 A + b^2 - 2bc \cos A)} = \frac{a}{2 \sin A},$$

folosind teorema cosinusului.

19) Folosind teorema sinusurilor să se arate că într-un triunghi la latura mai mare se opune unghiul mai mare.

Soluție:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Presupunem $a > b$. Să demonstrăm că $A > B$

$$\left. \begin{aligned} \frac{a}{\sin A} &= \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B} \\ a > b &\Rightarrow \frac{a}{b} > 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\sin A}{\sin B} > 1 \Rightarrow A, B, C \in (0, \pi) \Rightarrow \sin B > 0$$

$$\Rightarrow \sin A > \sin B \Rightarrow \sin A - \sin B > 0 \Rightarrow 2 \sin \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2} > 0 \Rightarrow \frac{A+B}{2} = \frac{180^\circ - C}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2}$$

$$\cos \frac{A+B}{2} = \cos(90^\circ - \frac{C}{2}) = \sin \frac{C}{2} > 0 \text{ deci } \frac{A-B}{2} > 0 \Rightarrow \frac{A-B}{2} > 0 \Rightarrow A > B$$

$$\left(-\frac{\pi}{2} < \frac{A-B}{2} < \frac{\pi}{2} \right)$$

20) Să se arate că în orice triunghi ABC avem:

$$a) \frac{a \cos C - b \cos B}{a \cos B - b \cos A} + \cos C = 0, \quad a \neq b$$

$$b) \frac{\sin(A-B) \sin C}{1 + \cos(A-B) \cos C} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

$$c) (a+c) \cos \frac{B}{4} + a \cos \left(A + \frac{3B}{4} \right) = 2c \cos \frac{B}{2} \cos \frac{B}{4}$$

Soluție:

$$a) a = 2R \sin A, b = 2R \sin B$$

$$\frac{2R \sin A \cos A - 2R \sin B \cos B}{2R \sin A \cos B - 2R \sin B \cos A} + \cos C = \cos C + \frac{\sin A \cos A - \sin B \cos B}{\sin A \cos B - \sin B \cos A} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \sin 2A - \frac{1}{2} \sin 2B}{\sin(A-B)} + \cos C = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \sin(A-B) \cos(A+B)}{\sin(A-B)} + \cos C =$$

$$\cos(A+B) + \cos C = \cos(180^\circ - C) + \cos C = -\cos C + \cos C = 0$$

b) Transformăm produsul în sumă:

$$\sin(A-B) \sin C = \frac{\cos(A-B-C) - \cos(A-B+C)}{2} = \frac{1}{2} [-\cos 2A + \cos 2B] =$$

$$(B+C=180^\circ-A, \quad A+C=180^\circ-B)$$

$$= \frac{a^2 - b^2}{4R^2}; \quad (1)$$

$$1 + \cos(A - B) \cos C = 1 + \frac{\cos(A - B + C) + \cos(A - B - C)}{2} =$$

$$= \frac{2 + \cos(180 - 2B) + \cos(2A - 180)}{2}$$

$$(A + B = 180^\circ - B, \quad B + C = 180^\circ - A)$$

$$= \frac{2 - \cos 2B - \cos 2A}{2} = \frac{2 - 1 + 2 \sin^2 B - 1 + 2 \sin^2 A}{2} = \sin^2 A + \sin^2 B = \left(\frac{a}{2R}\right)^2 +$$

$$+ \left(\frac{b}{2R}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{4R^2} \quad (2)$$

$$(1) \text{ și } (2) \Rightarrow \frac{\frac{a^2 - b^2}{4R^2}}{\frac{a^2 + b^2}{4R^2}} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

$$c)(a + c) \cos \frac{B}{4} + b \cos \left(A + \frac{3B}{4}\right) = a \cos \frac{B}{4} + b \cos \frac{B}{4} + b \cos \left(A + \frac{3B}{4}\right) = c \cos \frac{B}{4} +$$

$$+ a \cos \left(B - \frac{3B}{4}\right) + b \cos \left(A + \frac{3B}{4}\right)$$

Considerăm ultimii 2 termeni:

$$a \cos \left(B - \frac{3B}{4}\right) + b \cos \left(A + \frac{3B}{4}\right) = 2R \sin A \cos \left(B - \frac{3B}{4}\right) + 2R \sin B \cos \left(A + \frac{3B}{4}\right) =$$

$$= 2R \left(\frac{\sin \left(A + B - \frac{3B}{4}\right) + \sin \left(A - B + \frac{3B}{4}\right)}{2} + \frac{\sin \left(A + B - \frac{3B}{4}\right) + \sin \left(A - B + \frac{3B}{4}\right)}{2} \right) =$$

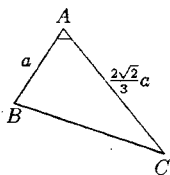
$$= R \left[\sin \left(A + B - \frac{3B}{4}\right) + \sin \left(A + B + \frac{3B}{4}\right) + \sin \left(A - B + \frac{3B}{4}\right) + \sin \left(A - B + \frac{3B}{4}\right) \right] =$$

$$= 2R \sin(A + B) \cos \frac{3B}{4} - 2R \sin(\pi - C) \cos \frac{3B}{4} + 2R \sin c \cos \frac{3B}{4} = c \cos \frac{3B}{4} + c \cos \frac{3B}{4} =$$

$$= c \left(\cos \frac{B}{4} + \cos \frac{3B}{4} \right) = 2c \cos \frac{B}{4} + \cos 3B = 2c \cos \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}$$

$$21) \text{ În triunghiul } ABC, A \in 45^\circ, \|AB\| = a, \|AC\| = \frac{2\sqrt{2}}{3}a. \text{ Să se arate că } \operatorname{tg} B = 2.$$

Soluție:



Aplicăm teorema cosinusului în triunghiul ABC :

$$\|BC\|^2 = a^2 + \frac{8}{9}a^2 - 2a \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2 + \frac{8a^2}{9} - \frac{4a^2}{3} = \frac{5a^2}{9}$$

$$\|BC\| = \frac{a\sqrt{5}}{3}$$

$$\|AC\|^2 = \|AB\|^2 + \|BC\|^2 - 2\|AB\|\|BC\|\cos B \Rightarrow \frac{8a^2}{9} = a^2 + \frac{5a^2}{9} - 2a \cdot \frac{a\sqrt{5}}{3} \cdot \cos B$$

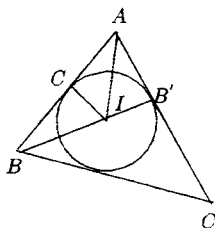
$$\Rightarrow \frac{2a^2\sqrt{5}\cos B}{2} = a^2 + \frac{5a^2}{9} - \frac{8a^2}{9} = \frac{6a^2}{9} \Rightarrow \cos B = \frac{6a^2}{9} \cdot \frac{3}{2a^2}\sqrt{5} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \sqrt{1 - \frac{5}{25}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{5}{\sqrt{5}} = 2$$

22) Fie A', B', C' puncte de tangență ale cercului înscris unui triunghi ABC cu laturile acestuia. Să se arate că $\frac{\sigma[A'B'C']}{\sigma[ABC]} = \frac{r}{2R}$

Soluție:



$$\|IA\| = \|IB\| = \|IC\| = r$$

$$\left. \begin{array}{l} IC' \perp AB \\ IA' \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow IA'B'C' \text{ patrulater iscriptibil} \Rightarrow$$

$$m(\widehat{A'IC'}) = 180 - \widehat{B} \Rightarrow \sin(\widehat{A'IC'}) = \sin \widehat{B}$$

$$\text{La fel } \sin \widehat{A'TB'} = \sin C \text{ și } \sin \widehat{C'TB'} = \sin A$$

$$\sigma[B'C'I] = \frac{r^2 \sin A}{2}$$

$$\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow \sin A = \frac{a}{2R}$$

$$\sigma[B'C'I] = \frac{r^2 \frac{a}{2R}}{2} = \frac{r^2 a}{4R}$$

$$\text{Analog } \sigma[A'B'I] = \frac{r^2}{4R}(a + b + c)$$

$$\sigma[ABC] = s = rp$$

$$\frac{\sigma[A'B'C']}{\sigma[ABC]} = \frac{r^2(a+b+c)}{4R} \Rightarrow \frac{1}{rp} = \frac{r}{2R}$$

23) Să se arate că în orice triunghi ABC $\sin \frac{A}{2} \leq \frac{a}{2\sqrt{bc}}$.

Soluție:

$$0 < A \Rightarrow \frac{A}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \frac{A}{2} > 0$$

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}} \Rightarrow \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{2} \\ \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{2} =$$

$$= \frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc} \leq \frac{a^2}{4bc} \Rightarrow \sin \frac{A}{2} \leq \frac{a}{2\sqrt{bc}}$$

24) Să se rezolve triunghiul ABC cunoscându-i elementele A, B și aria S .

Soluție:

$$C = \pi - (A + B)$$

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A} \\ A, B, C &\text{ cunoscute} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Se află } a$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow b = \frac{a \sin B}{\sin A}. \text{ La fel se află } c.$$

25) Să se rezolve triunghiul ABC cunoscând $a = 13$, $A = \arccos \frac{4}{5}$ și mediana corespunzătoare laturii a , $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{15\sqrt{3}}$

Soluție:

$$A = \arccos \frac{4}{5} \Rightarrow \cos A = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin A = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\text{Teorema cosinusului} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow 169 = 841 - 2bc \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{8bc}{5} = 841 - 169 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow bc = 420$$

$$\left. \begin{aligned} b^2 + c^2 &= 841 \\ bc &= 420 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} b &= 21 \\ c &= 20 \end{aligned} \right. \text{ sau } \left\{ \begin{aligned} b &= 20 \\ c &= 21 \end{aligned} \right.$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \frac{b \sin A}{a} \text{ se află } B$$

$$C = 180^\circ - (A + B)$$

$$\sin B = \frac{21 \cdot \frac{3}{5}}{13} = \frac{63}{65} \Rightarrow B = \arcsin \frac{63}{65}$$

$$C = 180^\circ - \left(\arccos \frac{4}{5} + \arcsin \frac{63}{65} \right) = 180^\circ - \left(\arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{63}{65} \right)$$

Se calculează suma.

Sau

$$\sin B = \frac{20 \cdot \frac{3}{5}}{13} = \frac{12}{13} \Rightarrow B = \arcsin \frac{12}{13}$$

$$C = 180^\circ - \left(\underbrace{\arcsin \frac{3}{5}}_{\alpha} + \underbrace{\arcsin \frac{12}{13}}_{\beta} \right)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{13} + \frac{12}{13} \cdot \frac{4}{5} = \frac{63}{65} \Rightarrow \alpha + \beta = \arcsin \frac{63}{65}$$

$$C = 180^\circ - \arcsin \frac{63}{65}$$

26) Să se calculeze unghiurile triunghiului ABC știind că $B - C = \frac{2\pi}{3}$ și $R = 8r$ unde R și r sunt razele cercurilor circumscrise și înscrise în triunghi.

Soluție:

$$R = 8r \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{1}{8}$$

$$\text{Știm deja că } \Rightarrow \frac{r}{R} = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \Rightarrow \frac{1}{8} = 4 \sin \frac{A}{2} \frac{\cos \frac{B-C}{2} - \cos \frac{B+C}{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8} = 2 \sin \frac{A}{2} \left(\cos \frac{2\pi}{6} - \cos \frac{180^\circ - A}{2} \right) \Rightarrow \frac{1}{8} = \sin \frac{A}{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{A}{2} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8} = 2 \sin \frac{A}{2} \left(\frac{1}{2} - \sin \frac{A}{2} \right)$$

$$\text{Notăm } \sin \frac{A}{2} = t. \text{ Avem}$$

$$\frac{1}{8} = 2t \left(\frac{1}{2} - t \right) = t - 2t^2$$

$$1 = 8t - 16t^2 \Rightarrow 16t^2 - 8t + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$4t - 1^2 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{4}$$

$$\sin \frac{A}{2} = \frac{1}{4}; \quad \cos \frac{A}{2} = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = \frac{\sqrt{15}}{8} \Rightarrow A = \arcsin \frac{\sqrt{15}}{8}$$

$$\begin{cases} B + C = \pi - \arcsin \frac{\sqrt{15}}{8} \\ B - C = \frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad \text{din acest sistem se află } B \text{ și } C.$$

$$2B = \frac{5\pi}{3} - \arcsin \frac{\sqrt{15}}{8}$$

$$B = \frac{5\pi}{6} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sqrt{15}}{8}$$

$$C = B - \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sqrt{15}}{8} = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sqrt{15}}{8}$$

Probleme diverse

1) Să se determine mulțimea punctelor din plan ale căror coordonatele afine z satisfac:

a) $|z| = 1$;

b) $\pi < \arg z \leq \frac{3\pi}{2}$; $z \neq 0$;

c) $\arg z > \frac{4\pi}{3}$, $z \neq 0$;

d) $|z + i| \leq 2$

Soluție:

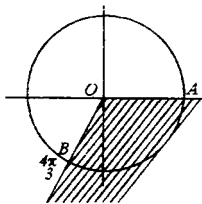
$$\left. \begin{array}{l} a) |z| = 1 \\ |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 \text{ deci mulțimea căutată este cercul } C_{(0,1)}$$

b) $\pi < \arg z \leq \frac{3\pi}{2}$.

Mulțimea căutată este dată de toate punctele cadranelor III și IV la care se adaugă semidreapta $[-Oy]$, deci toate punctele cu $x \leq 0, y \leq 0$

c)

$$\left. \begin{array}{l} \arg z > \frac{4\pi}{3}, z \neq 0 \\ \arg z \in [0, 2\pi] \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{4\pi}{3} < \arg z < 2\pi$$



$$\begin{aligned} x_B &= \cos \frac{4\pi}{3} = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \\ y_B &= \sin \frac{4\pi}{3} = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ m_{OB} &= \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow OB : y = \sqrt{3}x \end{aligned}$$

Mulțimea căutată este mulțimea punctelor interioare ale unghiului cu laturile semiaxa pozitivă și semidreapta OB .

d) $|z + i| \leq 2$

$z = x + yi$ imaginea sa geometrică M .

$$z + i = x + yi + i = x + (y + 1)i$$

$$|z + i| = \sqrt{x^2 + (y + 1)^2} \leq 2 \Rightarrow \|O'M\| \leq 2 \Rightarrow x^2 + (y + 1)^2 \leq 4 \Rightarrow \|O'M\|^2 \leq 4$$

unde $O'(0, -1)$.

Deci mulțimea căutată este discul de centru $O'_{(0, -1)}$ și rază 2.

2) Să se demonstreze că rădăcinile de ordin n ale unității sunt egale cu puterile rădăcini particulare ε_1

Soluție:

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

$$\varepsilon_1 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$$

$$\varepsilon_k = \cos k \frac{2\pi}{n} + i \sin k \frac{2\pi}{n} = \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right)^k = \varepsilon_1^k, \quad k = 2, 3, \dots, n-1$$

3) Știind că numărul complex z verifică ecuația $z^4 = n$, să se arate că numerele 2 , $-iz$ și iz verifică această ecuație.

Aplicație: Să se calculeze $(1 - 2i)^4$ și să se deducă rădăcinile de ordin 4 ale numărului $-7 + 24i$.

Soluție:

Fie ecuația $z^4 = n$. Dacă $z^4 = 4$ (este z soluție) atunci: $(-z)^4 = (-1)^4 z^4 = 1 \cdot n = n$ deci și $-z$ este soluție.

$$(iz)^4 = i^4 z^4 = 1 \cdot n = n \Rightarrow iz \text{ este soluție}$$

$$(-iz)^4 = (-i)^4 z^4 = 1 \cdot n = n \Rightarrow \text{deci } -iz \text{ este soluție}$$

$$\begin{aligned} (1 - 2i)^4 &= [(1 - 2i)^2]^2 = (1 - 4i + 4i^2)^2 = (1 - 4 - 4i)^2 = (-3 + 4i)^2 = 9 + 24i - 16 = \\ &= -7 + 24i \Rightarrow z = 1 - 2i \text{ este soluție a ecuației } z^4 = -7 + 24i. \end{aligned}$$

Soluțiile acestei ecuații sunt:

$z_k = \sqrt[4]{-7 + 24i}$, $k = 0, 1, 2, 3$ dar pe baza primei părți, dacă $z = 1 - 2i$ este rădăcină atunci $-z = -1 + 2i$, $iz = 2 + i$, $-iz = -2 - i$ sunt soluții ale ecuației date.

4) Să se arate că dacă numerele naturale m și n sunt prime între ele, atunci ecuațiile $z^m - 1 = 0$ și $z^n - 1 = 0$ au o singură rădăcină comună.

Soluție:

$$z^m - 1 = 0 \Rightarrow z = \sqrt[m]{1} \Rightarrow z_k = \cos \frac{2k\pi}{m} + i \sin \frac{2k\pi}{m}, \quad k = 0, \dots, m-1$$

$$z^n - 1 = 0 \Rightarrow z = \sqrt[n]{1} \Rightarrow z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, \dots, n-1$$

Dacă există k și k' cu $z_k = z_{k'}$, atunci

$\frac{2k\pi}{m} - \frac{2k'\pi}{n} = 2p\pi = mn|k'm - kn \Rightarrow n|k', m|k$, deoarece $(m, n) = 1$. Cum $k' < n$, $k < m$ avem $k' = 0$, $k = 0$.

Deci rădăcina comună este z_0 .

5) Să se rezolve următoarea ecuație binomă: $(2 - 3i)z^6 + 1 + 5i = 0$.

Soluție:

$$(2 - 3i)z^6 + 1 + 5i = 0 \Rightarrow z^6 = \frac{-1 - 5i}{2 - 3i} = 1 - i$$

$$r = \sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg} t = -1, t \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \Rightarrow t = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

$$z_k = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi}{6} + i \sin \frac{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi}{6} \right); \quad k \in 0, \dots, 5$$

6) Să se rezolve ecuația:

$$\left. \begin{array}{l} a) z^6 - 9z^3 + 8 = 0 \\ z^3 = y \end{array} \right\} \Rightarrow y^2 - 9y + 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} z^3 = 8 \\ z^3 = 1 \end{cases} \quad \text{etc.}$$

$$\left. \begin{array}{l} b) z^8 - 2z^4 + 2 = 0 \\ z^4 = y \end{array} \right\} \Rightarrow y^2 - 2y + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} z^4 = 1 + i \\ z^4 = 1 - i \end{cases} \quad \text{etc.}$$

$$\left. \begin{array}{l} c) z^4 + 6(1 + i)z^2 + 5 + 6i = 0 \\ z^2 = y \end{array} \right\} \Rightarrow y^2 + 6(1 + i)y + 5 + 6i = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-6(1 + i) \pm \sqrt{-20 + 48i}}{2} = \frac{-6(1 + i) \pm \sqrt{(4 + 6i)2}}{2} \quad \text{etc.}$$

7) Să se rezolve ecuația:

$\bar{z} = z^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, unde \bar{z} este conjugatul lui z .

Soluție:

$$\left. \begin{aligned} z = x + iy &\Rightarrow |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \bar{z} = x - iy &\Rightarrow |\bar{z}| = \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow |z| = |\bar{z}|$$

$$\text{Cum } \bar{z} = z^{n-1} \Rightarrow \left. \begin{aligned} |\bar{z}| &= |z|^{n-1} \\ |z| &= |\bar{z}| \end{aligned} \right\} \Rightarrow |z| = |z|^{n-1} \Rightarrow |z| \cdot (1 - |z|^{n-2}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} |z| = 0 \\ |z|^{n-2} - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Din } |z| = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ și } y = 0 \Rightarrow z = 0 + 0i$$

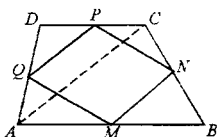
$$\text{Din } |z|^{n-2} - 1 = 0 \Rightarrow (|z| - 1) \underbrace{(|z|^{n-3} + |z|^{n-4} + \dots + 1)}_{\text{pozitiv}} = 0 \Rightarrow |z| = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

$$\left. \begin{aligned} z &= x + iy \\ \bar{z} &= x - iy \end{aligned} \right\} \Rightarrow z\bar{z} = x^2 + y^2 = 1$$

$$\text{Ecuația dată define } \bar{z} \cdot z = z^n \Rightarrow z^n = 1 \Rightarrow z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, k = 0, 1, \dots, n-1$$

8) Mijloacele laturilor unui patrulater oarecare sunt vîrfurile unui paralelogram.

Soluție:



$$A(z_1), B(z_2), C(z_3), D(z_4)$$

$$\Rightarrow M\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right), N\left(\frac{z_2 + z_3}{2}\right), P\left(\frac{z_3 + z_4}{2}\right), Q\left(\frac{z_4 + z_1}{2}\right)$$

Facem suma absciselor punctelor opuse:

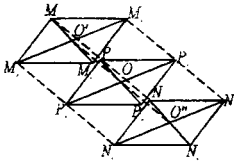
$$\frac{z_1 + z_2}{2} + \frac{z_3 + z_4}{2} = \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{2}$$

$$\frac{z_2 + z_3}{2} + \frac{z_4 + z_1}{2} = \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{2}$$

$$\text{Deci } \frac{z_1 + z_2}{2} + \frac{z_3 + z_4}{2} = \frac{z_2 + z_3}{2} + \frac{z_4 + z_1}{2} \Rightarrow MNPQ \text{ paralelogram.}$$

9) Fie $M_1M_2M_3M_4$ și $N_1N_2N_3N_4$ două paralelamente și P_i mijloacele segmentelor $[M_iN_i]$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Să se arate că $P_1P_2P_3P_4$ este un paralelogram sau un paralelogram degenerat.

Soluție: (sintetică)



În patrulaterul $M_1M_3N_3N_1$ prin unirea mijloacelor se obține paralelogramul $O'P_1O''P_3$, ale cărui diagonale se vor intersecta în O , mijlocul lui $|O'O''|$ și deci

$$|P_1O| \equiv |OP_3| \quad (1)$$

În patrulaterul $M_4M_2N_2N_4$ prin unirea mijloacelor laturilor se obține paralelogramul $O'P_2O''P_4$, ale cărui diagonale se vor intersecta în O , mijlocul lui $|O'O''|$ deci

$$\text{și } |P_2O| \equiv |OP_4| \quad (2)$$

Din (1) și (2) $\Rightarrow P_1P_2P_3P_4$ paralelogram.

9) Fie funcția $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = az + b$, ($a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$). Dacă M_1 și M_2 sunt de afixe z_1 și z_2 , iar M'_1 și M'_2 sunt de afixe $f(z_1)$, $f(z_2)$ să se arate că $\|M'_1M'_2\| = |a| \cdot \|M_1M_2\|$. Avem $\|M'_1M'_2\| = \|M_1M_2\| \Leftrightarrow |a| = 1$.

Soluție:

$$\|M'M\| = |z - z'|, \text{ deci } \|M_1M_2\| = |z_2 - z_1|$$

$$\begin{aligned} \|M_1M_2\| &= |f(z_2) - f(z_1)| = |az_2 + b - az_1 - b| = |az_2 - az_1| = |a(z_2 - z_1)| = |a| \cdot |z_2 - z_1| = \\ &= |a| \cdot \|M_1M_2\| \end{aligned}$$

$$\text{Dacă } |a| = 1 \Rightarrow \|M'_1M'_2\| = \|M_1M_2\|$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Dacă } \|M'_1M'_2\| &= \|M_1M_2\| \\ \|M'_1M'_2\| &= |a| \cdot \|M_1M_2\| \end{aligned} \right\} \Rightarrow \|M_1M_2\| = |a| \cdot \|M_1M_2\| \Rightarrow |a| = 1$$

10) Arătați că funcția $z \rightarrow \bar{z}$, $z \in \mathbb{C}$ definește o izometrie.

Soluție:

$$z = x + iy, \bar{z} = x - iy$$

Fie M_1 și M_2 de afixe z_1 și z_2 . Imaginile lor prin funcția dată sunt M'_1 și M'_2 cu afixe \bar{z}_1 și \bar{z}_2 , deci $f(z_1) = \bar{z}_1$, $f(z_2) = \bar{z}_2$

$$\|M_1M_2\| = |z_2 - z_1| = |x_2 + iy_2 - x_1 - iy_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (1)$$

$$\|M'_1M'_2\| = |\bar{z}_2 - \bar{z}_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (2)$$

$$\text{Din (1) și (2)} \Rightarrow \|M_1 M_2\| = \|M'_1 M'_2\| \text{ sau } \|M'_1 M'_2\| = |\bar{z}_2 - \bar{z}_1| = |\overline{z_2 - z_1}| = |z_2 - z_1| = \|M_1 M_2\|$$

Deci $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}$ definește o izometrie pentru că se păstrează distanța dintre puncte.

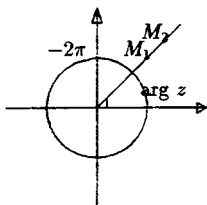
11) Fie M_1, M_2 de afixe $z_1, z_2 \neq 0$ și $z_2 = \alpha z_1$. Să se arate că semidreptele $|OM_1|, |OM_2$ coincid (respectiv sunt opuse) $\Leftrightarrow \alpha > 0$ (respectiv $\alpha < 0$).

Soluție:

Se știe că argumentul $(\alpha z_1) = \arg z_1 + \arg \alpha - 2k\pi$ unde $k = 0$ sau $k = 1$. Cum $\arg z_2 = \arg(\alpha z_1)$, $\arg z_2 = \arg z_1 + \arg \alpha - 2k\pi$.

a) Presupunem că $|OM_1| = |OM_2| \Rightarrow \arg z_1 = \arg z_2 \Rightarrow \arg z_1 = \arg z_1 + \arg \alpha - 2k\pi \Rightarrow \arg \alpha = 2k\pi$, $\arg \in [0, 2\pi] \Rightarrow \arg \alpha = 0 \Rightarrow \alpha \in |Ox \text{ (poz.)} \Rightarrow \alpha > 0$.

Reciproc, $\alpha > 0 \Rightarrow \arg \alpha = 0 \Rightarrow \arg z_2 = \arg z_1 - 2k\pi \Rightarrow \arg z_1 = \arg z_2$ sau $\arg z_2 = \arg z_1 - 2\pi \Rightarrow |OM_1| = |OM_2|$.

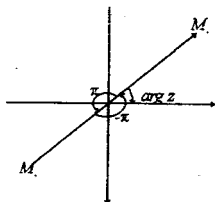


b) Fie $|OM_1|$ și $|OM_2|$ opuse $\Rightarrow \arg z_2 = \arg z_1 + \pi$

$\Rightarrow \arg z_1 + \pi = \arg z_1 + \arg \alpha - 2k\pi \Rightarrow \arg \alpha = \pi \Rightarrow \alpha \in \text{semidreptei negative } |Ox' \Rightarrow \alpha < 0$.

Reciproc, $\alpha < 0 \Rightarrow \arg \alpha = \pi \Rightarrow \arg z_2 = \arg z_1 + \pi - 2k\pi$

$$k = 0 \text{ sau } k = 1 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \arg z_2 = \arg z_1 + \pi \\ \text{sau} \\ \arg z_2 = \arg z_1 - \pi \end{array} \right\} \Rightarrow |OM_1| \text{ și } |OM_2| \text{ sunt opuse.}$$



12) Se consideră punctele M_1, M_2, M_3 de afixe z_1, z_2, z_3 și $M_1 \neq M_2$. Să se arate că:

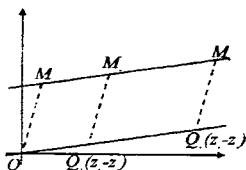
a) $M_3 \in |M_1M_2| \Leftrightarrow \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} > 0$

b) $M_3 \in M_1M_2 \Leftrightarrow \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}$

Soluție:

Dacă n și n' sunt imaginile geometrice ale numerelor complexe z și z' atunci imaginea diferenței $z - z'$ este construită pe $|OM'|$ și $|M'M|$ ca laturi.

a) Presupunem $M_3 \in |M_1M_2|$



Construim imaginea geometrică a lui $z_2 - z_1$. Este al patrulea vîrf al paralelogramului $OM_1M_2Q_1$. Imaginea geometrică a lui $z_3 - z_1$ este Q_2 , al patrulea vîrf al paralelogramului $OM_1M_3Q_2$

$$\left. \begin{array}{l} OQ_1 \parallel M_1M_2 \\ OQ_2 \parallel M_1M_3 \\ M_1M_2M_3 \text{ colin.} \end{array} \right\} \Rightarrow Q_1, Q_2, Q_3 \text{ coliniare} \Rightarrow$$

$$|OQ_1| = |OQ_2| \Rightarrow z_3 - z_1 = \alpha(z_2 - z_1) \Rightarrow \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \alpha \Rightarrow \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} > 0$$

Reciproc: presupunem $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} > 0 \Rightarrow \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = k > 0 \Rightarrow z_3 - z_1 = k(z_2 - z_1), k > 0$

$$\left. \begin{array}{l} OQ_1 = |OQ_2| \\ M_1M_2 \parallel OQ_1 \\ M_1M_3 \parallel OQ_2 \end{array} \right\} \Rightarrow |M_1M_2| = |M_1M_3| \Rightarrow M_3 \in |M_1M_2|$$

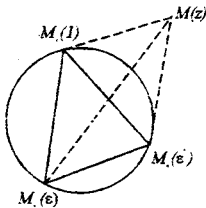
Dacă M_3 și M_2 \in semidrepte opuse față de O , atunci $z_3 - z_1 = \alpha(z_2 - z_1)$ cu $\alpha < 0$.

Se repetă raționamentul de la punctul anterior pentru același caz.

Deci cînd $M_3 \in M_1M_2$, $M_1 + M_2$ se vor pîține pentru raportul respectiv pozitiv, negativ sau avînd $M_3 = M_1$, deci $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}$.

13) Demonstrați teorema lui Pompeiu. Dacă punctul M din planul triunghiului echilateral $M_1M_2M_3 \notin$ cercului circumscris $\triangle M_1M_2M_3 \Rightarrow$ există un triunghi avînd lungimile laturilor $\|MM_1\|$, $\|MM_2\|$, $\|MM_3\|$.

Soluție:



Imaginile rădăcinilor de ordin 3 ale unității sunt vîrfurile unui triunghi echilateral.

$$\varepsilon_0 = 1, \varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \varepsilon_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

Dar $\varepsilon_1 = \varepsilon^2$, deci dacă notăm $\varepsilon_2 = \varepsilon$, atunci $\varepsilon_1 = \varepsilon^2$.

Deci $M_1(1)$, $M_2(\varepsilon)$, $M_3(\varepsilon^2)$.

Se folosește egalitatea:

$$(z-1)(\varepsilon^2 - \varepsilon) + (z - \varepsilon)(1 - \varepsilon^2) = (2 - \varepsilon^2)(1 - \varepsilon) \text{ adecvată } (\forall) z \in \mathbb{C}$$

$$|(z-1)(\varepsilon^2 - \varepsilon) + (z - \varepsilon)(1 - \varepsilon^2)| = |(z - \varepsilon^2)(1 - \varepsilon)|$$

$$\text{Dar } |(z-1)(\varepsilon^2 - \varepsilon) + (z - \varepsilon)(1 - \varepsilon^2)| \leq |(z-1)(\varepsilon^2 - \varepsilon)| + |(z - \varepsilon)(1 - \varepsilon^2)|$$

$$|(z-1)(\varepsilon^2 - \varepsilon) + (z - \varepsilon)(1 - \varepsilon^2)| \geq |(z-1)(\varepsilon^2 - \varepsilon)| - |(z - \varepsilon)(1 - \varepsilon^2)|$$

Deci:

$$|(z-1)(\varepsilon^2 - \varepsilon)| + |(z - \varepsilon)(1 - \varepsilon^2)| \geq |(z - \varepsilon^2)(1 - \varepsilon)|$$

$$|(z-1)(\varepsilon^2 - \varepsilon)| + |(z - \varepsilon)(1 - \varepsilon^2)| \geq |z - \varepsilon^2| \cdot |1 - \varepsilon|$$

$$\varepsilon = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, \varepsilon^2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varepsilon^2 - \varepsilon = i\sqrt{3} = 0 + i\sqrt{3} \Rightarrow |\varepsilon^2 - \varepsilon| = \sqrt{3}$$

$$1 - \varepsilon^2 = -1 - \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad |1 - \varepsilon^2| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}$$

$$1 - \varepsilon = 1 - \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} = \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

$$|1 - \varepsilon| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}.$$

Înlocuind:

$$|z - 1| \cdot \sqrt{3} + |z - \varepsilon| \cdot \sqrt{3} \geq |z - \varepsilon^2| \cdot \sqrt{3}$$

$$|z - 1| + |z - \varepsilon| \geq |z - \varepsilon^2| \text{ dar } \|MM_1\| = |z - 1|; \|MM_2\| = |z - \varepsilon|; \|MM_3\| = |z - \varepsilon^2|,$$

deci $\|MM_1\| + \|MM_2\| \geq \|MM_3\|$ deci $\|MM_1\|, \|MM_2\|, \|MM_3\|$ pct. și laturile unui Δ .

Apoi folosim $||x| - |y|| \leq |x - y|$ și se obține cealaltă inegalitate.

Probleme recapitulative (I)

1) Să se afle poziția celui de al treilea vîrf al triunghiului echilateral afixele a doua vîrfuri fiind $z_1 = 1, z_2 = 2 + i$

Soluție:

$$M_1 - z_1 = 1$$

$$M_2 - z_1 = 2 + i$$

$$M_1 - z_1 = x + yi$$

$$\triangle M_1 M_2 M_3 \text{ echilateral} \Rightarrow \|M_1 M_2\| = \|M_1 M_3\| = \|M_2 M_3\| \Rightarrow |z_2 - z_1| = |z_3 - z_1| = |z_1 - z_3|$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} \Rightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 = 2 \\ (1-x)^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ x^2+y^2-2x=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 2 - x$$

$$x^2 + 4 + x^2 - 4x - 2x = 1 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \\ y_2 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Deci: } M_3 \left(\frac{3 + \sqrt{3}}{2}, \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \right) \text{ sau } M_3 \left(\frac{3 - \sqrt{3}}{2}, \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right)$$

Există deci 2 soluții.

2) Fie z_1, z_2, z_3 trei numere complexe, nenule, +două cîte 2 și de module egale. Să se demonstreze că dacă $z_1 + z_2 z_3, z_2 + z_3 z_1, z_3 + z_1 z_2 \in \mathbf{R} \Rightarrow z_1 z_2 z_3 = 1$.

Soluție:

$$z_1 = r(\cos t_1 + i \sin t_1)$$

$$z_2 = r(\cos t_2 + i \sin t_2)$$

$$z_3 = r(\cos t_3 + i \sin t_3)$$

$$z_1 \neq z_2 \neq z_3 \Rightarrow t_1 \neq t_2 \neq t_3$$

$$\begin{cases} z_1 + z_2 z_3 \in \mathbf{R} \Rightarrow \sin t_1 + r \sin(t_2 + t_3) = 0 \\ z_2 + z_3 z_1 \in \mathbf{R} \Rightarrow \sin t_2 + r \sin(t_1 + t_3) = 0 \\ z_3 + z_1 z_2 \in \mathbf{R} \Rightarrow \sin t_3 + r \sin(t_1 + t_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin t_1(1 - r \cos t) + r \sin t \cdot \cos t_1 = 0 \\ \sin t_2(1 - r \cos t) + r \cos t \cdot \cos t_2 = 0 \\ \sin t_3(1 - r \cos t) + r \sin t \cdot \cos t_3 = 0 \end{cases} \quad t_1 \neq t_2 \neq t_3$$

Aceste egalități sunt simultan adevărate numai dacă $1 - r \cdot \cos t = 0$ și $r \cdot \sin t = 0$, cum $r \neq 0 \Rightarrow \sin t = 0 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow \cos t = 1 \Rightarrow 1 - r = 0 \Rightarrow r = 1$ deci $z_1 z_2 z_3 = 1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0) = 1$

3) Notăm cu G mulțimea rădăcinilor de ordin n ale unității, $G = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}\}$. Să se demonstreze că:

a) $\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j \in G, (\forall) i, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

b) $\varepsilon_i^{-1} \in G, (\forall) i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

a) $\varepsilon_k = \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

$$\text{Deci } \left. \begin{aligned} \varepsilon_i &= \cos \frac{2i\pi}{n} + i \sin \frac{2i\pi}{n} \\ \varepsilon_j &= \cos \frac{2j\pi}{n} + i \sin \frac{2j\pi}{n} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \varepsilon_i \varepsilon_j = \cos \frac{2\pi(i+j)}{n} + i \sin \frac{2\pi(i+j)}{n}, i, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

1) $i + j < n \Rightarrow i + j = k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \Rightarrow \varepsilon_i \varepsilon_j = \varepsilon_k \in G$

2) $i + j = n \Rightarrow \varepsilon_i \varepsilon_j = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1 = \varepsilon_0 \in G$

3) $i + j > n \Rightarrow i + j = n \cdot m + r, 0 \leq r < n, \varepsilon_i \varepsilon_j = \cos \frac{2\pi(n \cdot m + r)}{n} + i \sin \frac{2\pi(n \cdot m + r)}{n} =$
 $= \cos \left(2\pi m + \frac{2\pi r}{n} \right) + i \sin \left(2\pi m + \frac{2\pi r}{n} \right) = \cos \frac{2\pi r}{n} + i \sin \frac{2\pi r}{n} = \varepsilon_r \in G$

b) $\varepsilon_i = \cos \frac{2\pi i}{n} + i \sin \frac{2\pi i}{n}$

$$\varepsilon_i^{-1} = \frac{1}{\varepsilon_i} = \frac{\cos 0 + i \sin 0}{\cos \frac{2\pi i}{n} + i \sin \frac{2\pi i}{n}} = \cos \left(-\frac{2\pi i}{n} \right) + i \sin \left(-\frac{2\pi i}{n} \right) = \cos \left(2\pi - \frac{2\pi i}{n} \right) +$$

 $+ i \sin \left(2\pi - \frac{2\pi i}{n} \right) = \cos \frac{2\pi n - 2\pi i}{n} + i \sin \frac{2\pi n - 2\pi i}{n} = \cos \frac{2\pi(n-i)}{n} + i \sin \frac{2\pi(n-i)}{n},$
 $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

Dacă $i = 0 \Rightarrow n - i = n \Rightarrow \varepsilon_0^{-1} = \varepsilon_0 \in G$

Dacă $i \neq 0 \Rightarrow n - i \leq n - 1 \Rightarrow h = n - i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

$\Rightarrow \varepsilon^{-1} = \cos \frac{2\pi h}{n} + i \sin \frac{2\pi h}{n} \in G$

4) Fie ecuația $az^2 + bz + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{C}$ și $\arg a + \arg c = 2 \arg b$ și $|a| + |c| = |b|$. Să se arate că ecuația dată are cel puțin o rădăcină de modul unitar.

Soluție:

$$\begin{cases} a = r_1(\cos t_1 + i \sin t_1) & \arg a + \arg c = 2 \arg b \Rightarrow t_1 + t_3 = 2t_2 \\ b = r_2(\cos t_2 + i \sin t_2) & \text{și } |a| + |c| = |b| \Rightarrow r_1 + r_3 = r_2 \\ c = r_3(\cos t_3 + i \sin t_3) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c = 0 \Rightarrow z_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \\ &= \frac{-r_2(\cos t_2 + i \sin t_2) \pm \sqrt{r_2^2(\cos 2t_2 + i \sin 2t_2) - 4r_1r_3(\cos(t_1 + t_3) + i \sin(t_1 + t_3))}}{2r_1(\cos t_1 + i \sin t_1)} = \\ &= \frac{-r_2(\cos t_2 + i \sin t_2) \pm \sqrt{(\cos 2t_2 + i \sin 2t_2)(r_2^2 - 4r_1r_3)}}{2r_1(\cos t_1 + i \sin t_1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{dar } r_1 + r_3 = r_2 \Rightarrow r_2^2 &= r_1^2 + r_1^2 + r_3^2 + 2r_1r_3 \Rightarrow r_2^2 - 4r_1r_3 = r_1^2 + r_1^2 + r_3^2 + 2r_1r_3 - 4r_1r_3 = \\ &= (r_1 - r_3)^2 \end{aligned}$$

Deci:

$$z_{1,2} = \frac{-r_2(\cos t_2 + i \sin t_2) \pm (\cos t_2 + i \sin t_2)(r_1 - r_3)}{2r_1(\cos t_1 + i \sin t_1)}$$

Observăm în:

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{(\cos t_2 + i \sin t_2)(-2r_1)}{2r_1(\cos t_1 + i \sin t_1)} = -[\cos(t_2 - t_1) + i \sin(t_2 - t_1)] = \cos[\pi + (t_2 - t_1)] + \\ &+ i \sin[\pi + t_2 - t_1] \text{ și } |z_2| = 1. \end{aligned}$$

5) Fie z_1, z_2, z_3 trei numere complexe nenule, a.î. $|z_1| = |z_2| = |z_3|$.

a) Să se demonstreze că (\exists) numere complexe α și β a.î. $z_2 = \alpha z_1, z_3 = \beta z_2$ și $|\alpha| = |\beta| = 1$

b) Să se rezolve ecuația $\alpha^2 + \beta^2 - \alpha \cdot \beta - \alpha - \beta + 1 = 0$ în raport cu una dintre necunoscute.

c) Folosind eventual rezultatele de la a) și b) să se demonstreze că dacă $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3$, atunci avem $z_1 = z_2 = z_3$ sau numerele z_1, z_2 și z_3 sunt afixele vîrfurilor unui \triangle echilateral.

Soluție:

a) Fie

$$\begin{cases} z_1 = r(\cos t_1 + i \sin t_1) \\ z_2 = r(\cos t_2 + i \sin t_2), \\ z_3 = r(\cos t_3 + i \sin t_3) \end{cases} \quad r \neq 0$$

$$\text{Fie } \alpha = r_4(\cos t_4 + i \sin t_4)$$

$$\beta = r_5(\cos t_5 + i \sin t_5)$$

$$z_2 = \alpha z_1 \Rightarrow r(\cos t_2 + i \sin t_2) = r \cdot r_4[\cos(t_1 + t_4) + i \sin(t_1 + t_4)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = r \cdot r_4 \\ t_4 + t_1 = t_2 + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_4 = 1 \\ t_4 = t_2 - t_1 + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\alpha| = 1 \\ t_4 = t_2 - t_1 + 2k\pi \end{cases}$$

Deci α este determinat.

$$z_3 = \beta z_1 \Rightarrow r(\cos t_3 + i \sin t_3) = r \cdot r_5[\cos(t_1 + t_5) + i \sin(t_1 + t_5)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = r \cdot r_5 \\ t_5 + t_1 = t_3 + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_5 = 1 \\ t_5 = t_3 - t_1 + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\beta| = 1 \\ t_5 = t_3 - t_1 + 2k\pi \end{cases}$$

Deci β este determinat.

Dacă se lucrează cu argumente reduse atunci $t_4 = t_2 - t_1$ sau $t_4 = t_2 - t_1 + 2\pi$, la fel t_5 .

$$\text{b) } \alpha^2 + \alpha(-\beta - 1) + \beta^2 - \beta + 1 = 0$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{\beta + 1 \pm \sqrt{\beta^2 + 2\beta + 1 - 4\beta^2 + 4\beta - 4}}{2} = \frac{\beta + 1 \pm \sqrt{-3\beta^2 + 6\beta - 3}}{2} = \frac{\beta + 1 + i(\beta - 1)\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha_1 = \frac{\beta + i(\beta - 1)\sqrt{3}}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{\beta - i(\beta - 1)\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{c) } z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3$$

Conform a) (\exists) numerele complexe de modul 1, α și β a.î. $z_2 = \alpha z_1$ și $z_3 = \beta z_1$

Înlocuind în relația dată obținem:

$$\left. \begin{aligned} z_1^2 + \alpha^2 z_1^2 + \beta^2 z_1^2 &= \alpha z_1^2 + \alpha \beta z_1^2 + \beta z_1^2 \\ z_1 &\neq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 + \alpha^2 + \beta^2 - \alpha - \beta - \alpha \cdot \beta = 0$$

$\Rightarrow \alpha = 1$ și $\beta = 1$ verifică această egalitate, deci în acest caz $z_2 = z_3 = z_1$

Conform pct. b) $\alpha_1 = \frac{\beta + i(\beta - 1)\sqrt{3}}{2}$, unde $\beta = x + iy$ cu $|\beta| = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \Rightarrow$

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (1)$$

$$\alpha = \frac{x + iy + 1 + i(x + iy - 1)\sqrt{3}}{2} = \frac{(x + 1 - y\sqrt{3}) + i(y + x\sqrt{3} - \sqrt{3})}{2} \left. \vphantom{\alpha = \frac{x + iy + 1 + i(x + iy - 1)\sqrt{3}}{2}} \right\} \Rightarrow$$

$$|\alpha| = 1$$

$$\Rightarrow |\alpha| = \sqrt{\left(\frac{x + 1 - y\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{y + x\sqrt{3} - \sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - x + 1y\sqrt{3}} = 1$$

Formăm sistemul:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 - x - y\sqrt{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 1 - x - y\sqrt{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - y\sqrt{3} \\ y(2y - \sqrt{3}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1 + \alpha^2 + 1 - \alpha - 1 - \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 1$$

Soluția observată inițial ne conduce la $z_1 = z_2 = z_3$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ și } d\ddot{a} -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\text{Înlocuind: } 1 + \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} + \alpha^2 - \alpha - \alpha \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\alpha^2 - \alpha(1 + \sqrt{3}i) + 2(1 - \sqrt{3}i) = 0$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{(1 + \sqrt{3}) \pm 3\sqrt{-2 + 2\sqrt{3}i}}{4} = \frac{(1 + \sqrt{3}i) \pm 3(1 + \sqrt{3}i)}{4}$$

$$\alpha_1 = \frac{4(1 + \sqrt{3}i)}{4}, \quad |\alpha| = 2 \text{ nu îndeplinește condiția } |\alpha| = 1$$

$$\text{dar } \alpha_2 = \frac{-2(1 + \sqrt{3}i)}{4} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad |\alpha| = 1$$

deci

$$\begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \\ \beta = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$\text{Dacă } z_1 = r(\cos t_1 + i \sin t_1), \text{ atunci } t_2 = \alpha t_1 = r \cdot \left[\cos \left(t_1 + \frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left(t_1 + \frac{4\pi}{3} \right) \right] \text{ și}$$

$$\text{atunci } t_3 = \beta t_2 = r \cdot \left[\cos \left(t_1 + \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(t_1 + \frac{2\pi}{3} \right) \right].$$

$$\text{Dacă } M_1(t_1), M_2(t_2), M_3(t_3) \text{ se află pe cercul de rază } r \text{ și argumentele fiind } t_1, t_1 + \frac{2\pi}{3},$$

$$t_1 + \frac{4\pi}{3} \Rightarrow \text{ele sunt vîrfurile unui triunghi echilateral.}$$

Probleme de geometrie spațială

1) Să se arate că dacă o dreaptă d nu este conținută în planul α atunci $d \cap \alpha$ este \emptyset sau este formată dintr-un singur punct.

Soluție:

Presupunem că $d \cap \alpha = \{A, B\} \Rightarrow d \subset \alpha$, contrazice ipoteza $\Rightarrow d \cap \alpha = \{A\}$ sau $d \cap \alpha = \emptyset$.

2) Să se arate că $(\forall)\alpha, (\exists)$ cel puțin un punct nesituat în α .

Soluție:

Presupunem că toate punctele al aparține planului $\alpha \Rightarrow (\forall)$ pentru puncte nesituate în același plan. Fals contrazice, A.1.3.

3) Există două drepte fără punct comun:

Soluție:

Conform A.1.3 $(\exists) A, B, C, D$ nesituate în același plan. Presupunem că $AB \cap CD = \{O\} \Rightarrow AB$ și CD sunt conținute în același plan și deci A, B, C, D sunt în același plan. Fals, contrazice ipoteza $\Rightarrow AB \cap CD = \emptyset \Rightarrow (\exists)$ drepte fără punct comun.

4) Să se arate că fiind dată o dreaptă oarecare d (\exists) cel puțin două plane care contin dreapta d .

Soluție:

$(\exists) A \notin d$ (dacă toate punctele ar $\in d$ ar fi negată existență planului și a spațiului). Fie $\alpha = (dA), (\exists) B \notin \alpha$ (altfel n-ar exista spațiul). Fie $\beta = (Bd), \alpha \neq \beta$ și ambele conțin dreapta d .

5) Se consideră dreptele d, d', d'' a.i. luate două câte două să se intersecteze. Să se arate că atunci cele 3 drepte au un punct comun sau sunt așezate în același plan.

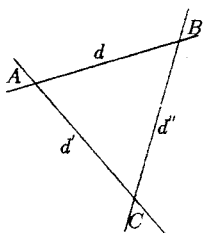
Soluție:

Se arată că

$$d \neq d' \neq d'' \neq d.$$

$$\text{Fie } d \cap d' = \{A\} \Rightarrow \alpha = (d, d') \Rightarrow \begin{cases} d \subset \alpha \\ d' \subset \alpha \end{cases}$$

$$\begin{matrix} d \cap d' = \{B\} \\ B \neq A \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} B \in d \\ d \subset \alpha \end{cases} \Rightarrow B \in \alpha \text{ și } B \in d''$$



$$\begin{matrix} d'' \cap d' = \{C\} \\ C \neq B \\ c \neq A \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} C \in d' \\ d' \subset \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} C \in \alpha \text{ și } C \in d'' \Rightarrow \\ \text{sau} \\ d = d'' \end{matrix}$$

$\Rightarrow d'' \subset \alpha$ deci dreptele sunt așezate în același plan α .

$$\left. \begin{matrix} \text{Dacă } d \cap d' = \{A\} \Rightarrow A \in d' \\ d'' \cap d = \{A\} \Rightarrow A \in d'' \end{matrix} \right\} \Rightarrow d' \cap d'' = \{A\}$$

și cele 3 drepte au un punct comun.

6) Fie A, B, C trei puncte necoliniare și Δ un punct situat în planul (ABC) . Să se arate:

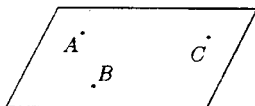
- Punctele D, A, B nu sunt coliniare și nici $D, B, C; D, C, A$
- intersecția planelor $(DAB), (DBC), (DCA)$ este formată dintr-un singur punct.

Soluție:

D

a) $D \notin (ABC)$

Presupunem că D, A, B coliniare $\Rightarrow (\exists) d$



$$\left. \begin{matrix} \text{a.i. } D \in d, A \in d \text{ și } B \in d \\ A \in (ABC), B \in (ABC) \\ D \in (ABC) - \text{fals} \end{matrix} \right\} \xrightarrow{T_2} d \subset (ABC) \Rightarrow$$

Deci punctele D, A, B nu sunt coliniare.

b) Fie $(DAB) \cap (BDC) \cap (DCA) = E$.

Cum planele sunt distincte, intersecțiile lor sunt:

$$\left. \begin{matrix} (DAB) \cap (DBC) = DB \\ (DAB) \cap (DCA) = DA \\ (DBC) \cap (DCA) = DC \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{matrix} \text{Dacă } (DAB) = (DBC) \\ \Rightarrow A, B, C, D \text{ coplanare, contrar ipotezei.} \end{matrix}$$

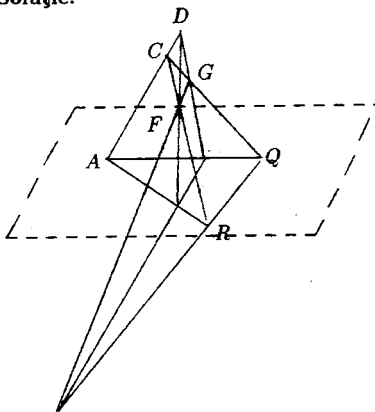
$$\text{Presupunem că } (\exists) M \in E, M \neq D \Rightarrow \left. \begin{matrix} M \in DB \\ M \in DA \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} B \in MD \\ A \in MD \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow A, B, D$ sunt coliniare (fals contrar punctului a))

Deci mulțimea E are un singur punct $E = \{D\}$.

7) Folosind notațiile ex. 6, se iau punctele E, F, G distincte de A, B, C, D , a.î. $E \in AD$, $F \in BD$, $G \in CD$. Fie $BC \cap FG = \{P\}$, $GE \cap CA = \{Q\}$, $EF \cap AB = \{R\}$. Să se arate că P, Q, R sunt coliniare (T. Desargues).

Soluție:



Am arătat la 6 că dacă $D \notin (ABC)$,

$(DAB) \neq (DBC)$

Arătăm că E, F, G nu sunt coliniare. Presupunem contrarul. Atunci

$$\left. \begin{array}{l} G \in EF \\ EF \subset (DAB) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} G \in (DAB) \\ G \in (DBC) \end{array} \right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow (DAB) = (DBC)$

Având trei puncte comune D, B și $G \Rightarrow$ fals.

Deci E, F, G nu sunt coliniare și determină un plan (EFG)

$$\left. \begin{array}{l} P \in BC \Rightarrow P \in (ABC) \\ P \in FG \Rightarrow P \in (EFG) \\ R \in AB \Rightarrow R \in (ABC) \\ R \in EF \Rightarrow R \in (EFG) \\ Q \in CA \Rightarrow Q \in (ABC) \\ Q \in GE \Rightarrow Q \in (EFG) \end{array} \right\} P, Q, R \in (ABC) \cap (EFG) \Rightarrow$$

$\Rightarrow P, Q, R$ sunt coliniare pentru că \in dreptei de intersecție a celor 2 plane.

8) Se consideră drepte d și d' nesituate în același plan și punctele distincte $A, B, C \in d$ și $D, E \in d'$. Cite plane diferite putem duce a.î. fiecare să conțină 3 pct. necoliniare dintre punctele date? Generalizare.

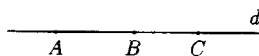
Soluție:



Planele sunt (A, d') ; (B, d') ; (C, d') .

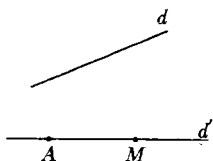
Generalizare:

Numărul planelor corespunde cu numărul punctelor de pe dreapta d deoarece d' conține doar 2 puncte.



9) Arătați că există o infinitate de plane care conțin o dreaptă dată d .

Soluție:



Fie dreapta d dată și A un punct oarecare a.i. $A \notin d$.

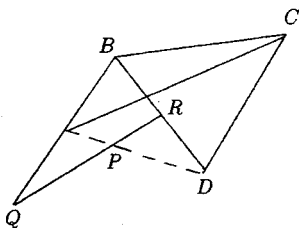
Obținem planul $\alpha = (A, d)$ și fie $M \notin \alpha$. Dreapta $d' = AM$, $d' \not\subset \alpha$ nu este conținută deci în același plan cu d . Planurile căutate sunt cele de forma (Md) , $M \in d'$, deci o infinitate de plane.

10) Se consideră punctele A, B, C, D , nesituate într-un plan.

a) Câte dintre dreptele AB, AC, AD, BC, BD, CD pot fi intersectate de o dreaptă care nu trece prin A, B, C, D ?

b) dar de un plan ce nu trece prin A, B, C, D ?

Soluție:



(\forall) 3 puncte determină un plan. Fie planul (ABD) . În acest plan alegem $P \in |AD|$ și $Q \in AB$ a.i. $A \in |BQ|$, atunci dreapta PQ separă punctele A și D și nu separă pe A și B , deci separă pe P și $D \Rightarrow PQ \cap |BD| = R$, unde $R \in |BD|$.

Dreapta PQ întâlnește deci 3 dintre dreptele date. Să vedem dacă poate întâlni mai multe.

Presupunem că $PQ \cap BC = \{E\} \Rightarrow E \in PQ \subset (ABD) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} E \in (ABD) \\ E \in BC \end{array} \right\} \Rightarrow$

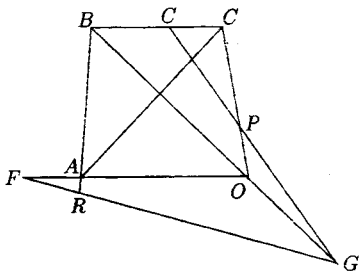
are două punctele comune cu planul.

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B \in (ABD) \\ B \in BQ \end{array} \right\} \Rightarrow BC \subset (ABD) \Rightarrow A, B, C, D \text{ coplanare - fals.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Deci } BC \cap (ABD) = \{E\} \\ BC \cap (ABD) = \{B\} \end{array} \right\} \Rightarrow E = B \Rightarrow B \in PQ, \text{ fals.}$$

La fel se arată că PQ nu taie AC sau DC , deci o dreaptă întâlnește cel mult trei dintre dreptele date.

b)



Se consideră punctele E, F, G a.i. $E \in |BC|$, $A \in |DF|$, $D \in |BG|$. Aceste punctele determină planul (EFG) care taie evident dreptele BC, BD și BD . FG nu separă pe A și D și nici pe $BD \Rightarrow$ nu separă nici pe A și $B \Rightarrow A \in |BR|$. Să arătăm că (EFG) întâlnește și dreptele AB, CD, AC . În planul (ABD) considerăm triunghiul FDG și dreapta AB .

Cum această dreaptă taie latura $|FD|$ dar nu taie $|DG|$, trebuie să taie latura $|FG|$ deci $AB \cap |FG| = \{R\} \Rightarrow R \in |FG| \subset (EFG)$ deci $AB \cap (EFG) = \{R\}$. În planul (BCD) dreapta EG taie $|BC|$ și nu taie $|BD|$, deci EG taie latura $|CD|$, $EG \cap |CD| = \{P\} \Rightarrow P \in EG \subset (EFG) \Rightarrow CD \cap (EFG) = \{P\}$.

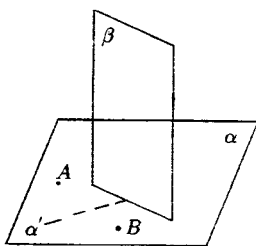
$$\left. \begin{array}{l} R \in (EFG), R \text{ nu separă } A \text{ și } B \\ E \text{ separă } B \text{ și } C \end{array} \right\} \Rightarrow R \in \cap |AC| = Q$$

$$\Rightarrow Q \in RE \Rightarrow Q \in (EFG) \Rightarrow (EFG) \cap AC = \{Q\}.$$

11) Se dau punctele α și β , $A, B \in \alpha$. Să se construiască un punct $M \in \alpha$ egal depărtat de A și B , care să \in și planului. β .

Soluție:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Presupunem problema rezolvată:} \\ \text{Dacă } M \in \alpha \\ M \in \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \cap \beta \neq \emptyset \Rightarrow \alpha \cap \beta = d$$



Cum $\|MA\| = \|MB\| \Rightarrow M \in \text{mediatoarei seg. } [AB]$.

Deci pentru găsirea lui M se procedează astfel:

- 1) Se caută dreapta de intersecție a planelor α și β , d . Dacă $\alpha \parallel \beta$ problema nu are soluții.
- 2) În planul α se construiește mediatoarea d' a segmentului $[AB]$.
- 3) Se caută punctul de intersecție al dreptelor d și d' . Dacă $d \parallel d'$ problema nu are soluții.
- 12) Să se determine intersecția a trei plane distincte α, β, γ .

Soluție:

Dacă $\alpha \cap \beta = \emptyset \Rightarrow \alpha \cap \beta \cap \gamma = \emptyset$. Dacă $\alpha \cap \beta = d$, intersecția căutată este $d \cap \gamma$, care poate fi un punct (cele 3 plane sunt concurente), mulțimea vidă (dreapta de intersecție a două plane este \parallel cu al treilea) sau dreapta d (cele 3 plane trec prin d , sunt secante).

- 13) Se dau: planul α , dreptele d_1, d_2 și punctele $A, B \notin \alpha \cup d_1 \cup d_2$. Să se afle un punct $M \in \alpha$ a.i. dreptele MA, MB să intersecteze respectiv pe d_1 și d_2 .

Soluție:

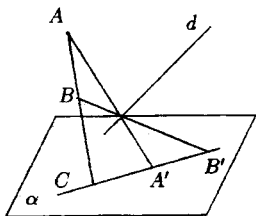
Pentru determinarea lui M se procedează astfel:

- 1) Se construiește planul (Ad_1) și se caută dreapta de intersecție cu α, d_1' . Dacă $d_1' \parallel \alpha$, (β) nici M .
- 2) Se construiește planul (Bd_2) și se caută dreapta de intersecție cu α, d_2' . Dacă d_2' nu există, nu există nici M .
- 3) Se caută punctul de intersecție al dreptelor d_1' și d_2' . Problema are o singură soluție, dacă dreptele sunt concurente, o infinitate, dacă coincid, și nici una, dacă sunt paralele.

- 14) Se dau planul α , dreapta $d \not\subset \alpha$, punctele $A, B \notin \alpha \cup d$ și $C \in \alpha$. Fie $M \in d$ și A', B' punctele de intersecție ale dreptelor MA, MB cu planul α (dacă ele există).

Să se determine punctul M a.i. punctele C, A', B' să fie coliniare.

Soluție:



Presupunem problema rezolvată.

a) Presupunem întâi că A, B, C sânt coliniare. Cum AA' și BB' sânt drepte concurente, ele determină un plan β care intersectează pe α după dreapta $A'B'$.

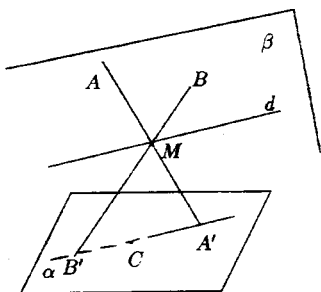
$$\left. \begin{array}{l} \text{Cum } C \in AB \Rightarrow C \in \beta. \\ \text{dar } C \in \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow C \in \alpha \cup \beta \Rightarrow C \in A'B'$$

și punctele C, A, B' sunt coliniare $(\forall) M \in d$.

b) Presupunem că A, B, C nu sunt coliniare.

Observăm că: $(AA', BB') = \beta$ (plan determinat de 2 drepte concurente).

$\beta \cup \alpha = d'$ și $C \in d'$



Pentru determinarea lui M procedăm astfel:

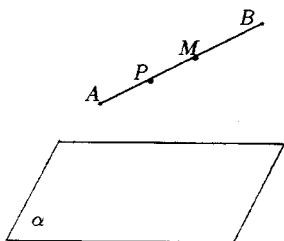
- 1) Determinăm planul (ABC)
- 2) Cautăm unctul de intersecție al acestui plan cu dreapta d , deci $d \cap (ABC) = \{M\}$ este punctul dorit.

Atunci $(ABC) \cap \alpha = d'$

$$\left. \begin{array}{l} AM \cap \alpha = \{A'\} \\ BM \cap \beta = \{B'\} \\ C \in \{A'\} \\ C \in \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A'B \in d' \\ C \in d' \end{array} \right\} \Rightarrow A', B', C' \text{ sunt coliniare.}$$

15) Dacă punctele A și B unui semispațiu deschis σ , atunci $[AB] \subset \sigma$. Proprietatea este aderentă și dentro un semispațiu închis.

Soluție:



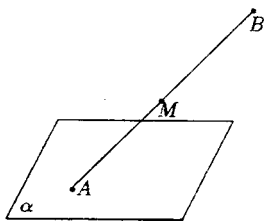
$A \in \sigma$ și $B \in \sigma \Rightarrow [AB] \cap \alpha \neq \emptyset$.

Fie $\sigma = |\alpha A = |\alpha B$.

Fie $M \in [AB]$ și trebuie arătat că $M \in \sigma(\forall)M$ în interiorul segmentului.

Presupunem contrariul că $M \notin \sigma \Rightarrow (\exists)P$ a.i. $[AM] \cap d = \{P\} \Rightarrow P \in [AM] \Rightarrow P \in [AB] \Rightarrow [AB] \cap \alpha \neq \emptyset$ fals.

$P \in \alpha$, deci $M \in \sigma$. Proprietatea se păstrează și în cazul semispațiului închis. Față de cazul anterior mai poate apărea cazul în care unul din punctele A și $B \in \alpha$, sau cînd amîndouă aparțin lui α .



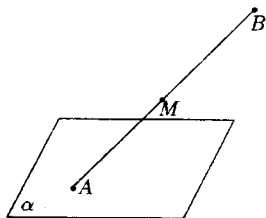
Dacă $A \in \alpha, B \in \sigma, [AB] \cap \alpha \neq \emptyset$ și se arată ca mai sus că:

$$\left. \begin{array}{l} [AB] \subset \sigma \\ A \in \alpha \\ B \in \sigma \end{array} \right\} \Rightarrow [AB] \subset \sigma \cup \alpha$$

Dacă $A, B \in \alpha \Rightarrow AB \subset \alpha \Rightarrow [AB] \subset \alpha \Rightarrow [AB] \subset \alpha \cup \sigma$.

16) Dacă punctul A nu este situat în planul α și $B \in \alpha$ atunci $|BA| \subset |\alpha A$.

Soluție:



Fie $M \in |BA \Rightarrow B \notin [MA] \Rightarrow [MA] \cap \alpha = \emptyset$

$\Rightarrow M \in |\alpha A$

Deci $|BA| \subset |\alpha A$

17) Să se arate că intersecția unei drepte d cu un semispațiu este fie dreapta d , fie o semidreaptă, fie mulțimea vidă.

Soluție:

Fie α un plan și σ_1, σ_2 cele 2 semispații pe care le determină. Considerăm semispațiul σ_1 .

$$d \cap \alpha = \emptyset$$

$$1) d \cap \sigma_1 = \emptyset$$

$$2) d \cap \sigma_1 \neq \emptyset, \text{ fie } A \in d \cap \sigma_1 \Rightarrow \begin{cases} A \in \sigma_1 \\ A \in d \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Fie } M \in d \Rightarrow [AM] \subset d \\ d \cap \alpha = \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} [AM] \cap \alpha = \emptyset \\ A \in \sigma_1 \end{array} \right\} \Rightarrow M \in \sigma_1, (\forall) M \in d \Rightarrow d \subset \sigma_1 \Rightarrow d \cap \sigma_1 = d$$

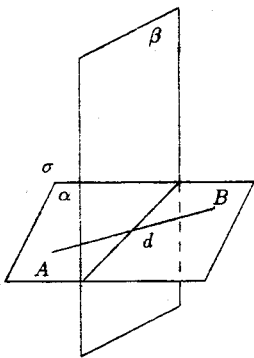
$$3) d \cap \alpha \neq \emptyset \Rightarrow d \cap \alpha = \{P\} \Rightarrow P \text{ determina pe } d \text{ două semidrepte, } |PA \text{ și } |PB \text{ unde}$$

$$\left. \begin{array}{l} P \in |AB| \\ P \in \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow |AB| \cap \alpha \neq \emptyset \Rightarrow A \text{ și } B \text{ sunt în semispații diferite.}$$

$$\text{Presupunem } \left. \begin{array}{l} A \in \sigma_1 \\ P \in \alpha \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{pr.2}} |PA \subset |\alpha A \Rightarrow |PA \subset \sigma_1 \Rightarrow \sigma_1 \cap d = |PA.$$

18) Arătați că dacă un plan α și frontiera unui semispațiu σ sunt plane secante, atunci intersecția $\sigma \cap \alpha$ este un semiplan.

Soluție:



Fie σ un semispațiu deschis și p frontiera sa și fie $d = \alpha \cap \beta$.

Alegem punctele A și $B \in \alpha - d$, de o parte și de alta a dreptei $d \Rightarrow$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow [AB] \cap \beta \neq \emptyset \\ d \subset \beta \end{array} \right\} \Rightarrow [AB] \cap \beta \neq \emptyset$$

$\Rightarrow A, B$ sunt de o parte și de alta a lui β , adică numai una din ele se află în σ .

Presupunem $A \in \sigma \Rightarrow B \in \sigma$. Demonstrăm acum $\alpha \cap \sigma = |dA$

$$1) \alpha \cap \sigma \subset |dA$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Fie } M \in \alpha \cap \sigma \Rightarrow M \in \alpha, M \in \sigma \\ A \in \sigma, B \notin \sigma \end{array} \right\} \Rightarrow [MB] \cap B \neq \emptyset \quad \left. \begin{array}{l} M \in \alpha \\ B \in \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$[MB] \cap d \neq \emptyset \Rightarrow M$ și B sunt de o parte și de alta a dreptei $d \Rightarrow M$ este de aceeași parte a dreptei d cu $A \Rightarrow M \in |dA$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow M \in |dA \Rightarrow [MA] \cap d = \emptyset \\ \alpha \cap \beta = d \\ [MA] \subset \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow [MA] \cap B = \emptyset \Rightarrow M \in |\beta A \Rightarrow \left. \begin{array}{l} M \in \sigma \\ M \in \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow M \in \alpha \cap \sigma$ deci $|dA \subset \alpha \cap \sigma$.

19) Intersecția unui plan α cu un semispațiu este fie planul α , fie un semiplan, fie mulțimea vidă.

Soluție:

Fie σ semispațiul considerat și β frontiera sa. Sînt posibile mai multe cazuri:

1) $\alpha \cap \beta = \emptyset$, în acest caz se poate ca:

a) $\alpha \cap \sigma = \emptyset$

b) $\alpha \subset \sigma \neq \emptyset \Rightarrow (\exists) A \in \alpha \cap \sigma \Rightarrow \begin{array}{l} A \in \alpha \\ A \in \sigma \end{array}$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Fie } M \in \alpha \Rightarrow [MA] \subset \alpha \\ \alpha \cap \beta = \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} [MA] \cap \beta = \emptyset \\ A \in \sigma \end{array} \Rightarrow M \in \sigma, (\forall) M \in \alpha \Rightarrow \alpha \subset \sigma \Rightarrow \alpha \cap \sigma = \alpha$$

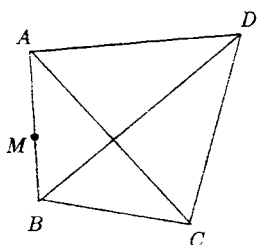
2) $\alpha \cap \beta \neq \emptyset \Rightarrow \alpha \cap \beta = d \Rightarrow \alpha \cap \sigma$ este un semiplan conform problemei anterioare 4.

20) Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare și α un plan care nu trece prin unul din punctele date, dar trece printr-un punct al dreptei $|AB|$. Dintre segmentele $|AB|, |AC|, |AD|, |BC|, |BD|, |CD|$. Cîte pot fi intersectate de planul α ?

Soluție:

Intersecția a două plane este o dreaptă, iar dreapta taie doar două laturi ale unui triunghiuri:

Sînt posibile mai multe cazuri:



1) d taie $|AB|$ și $|BC|$

d' taie $|AB|$ și $|AD|$, α taie pe $|AD|$ are deci un punct cu (ADC) și fie $(ADC) \cap \alpha = d''$

d'' taie $|AD|$ și nu taie $|AC| \Rightarrow d''$ taie $|DC|$

α taie $|DC|$ și $|BC| \Rightarrow$ nu taie $|BD|$. În acest caz α taie 4 din cele 6 segmente (cele subliniate).

2) d taie $|AB|$ și $|AC|$, nu taie $|BD|$

d' taie $|AB|$ și $|AD|$, nu taie $|BD|$

d'' taie $|AD|$ și $|AC|$, nu taie $|DC|$

$\Rightarrow \alpha$ nu intersectează planul (BDC) . În acest caz α intersectează numai 3 din cele 6 segmente.

3) d taie $|AB|$ și $|BC|$, nu taie $|AC|$

d' taie $|AB|$ și $|BD|$, nu taie $|DC|$

α intersectează $|BD|$ și $|BC|$, deci nu taie $|DC|$

În $\triangle BDC \Rightarrow \alpha$ nu intersectează planul (ADC)

În acest caz α intersectează numai trei segmente.

4) d taie $|AB|$ și $|AC|$, nu taie $|BC|$

d' taie $|AB|$ și $|BD|$, nu taie $|AD|$

d'' taie $|AC|$ și $|DC|$

În triunghiul BDC α nu taie $|BC|$. Deci α intersectează 4 sau 3 segmente.

21) Fie d o dreaptă și α, β două plane a.i. $d \cap \beta = \emptyset$ și $\alpha \cap \beta = \emptyset$. Să se arate că dacă $A \in d$ și $B \in \alpha$, atunci $d \subset |BA|$ și $\alpha' \subset |BB|$.

Soluție:

$$d \cap \beta = \emptyset$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Fie } M \in d \\ A \in d \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} [AM] \subset d \\ d \cap \beta = \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow [AM] \cap \beta = \emptyset$$



$$\Rightarrow M \in |\beta A, (\forall) M \in d \Rightarrow d \subset |\beta A$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Fie } N \in \alpha \\ B \in \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} [NB] \subset \alpha \\ \alpha \cap \beta = \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow [NB] \cap \beta = \emptyset$$

$$\alpha \subset |\beta B.$$

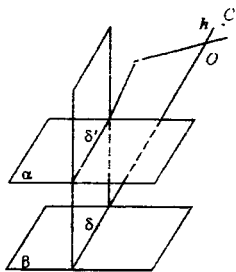
22) Fie $|\alpha A$ și $|\beta B$ două semispații a.f. $\alpha \neq \beta$ și $|\alpha A \subset |\beta B$ sau $|\alpha A \cap |\beta B = \emptyset$. Să se arate că $\alpha \cap \beta = \emptyset$.

Soluție:

1) Presupunem întâi că $\alpha \neq \beta$ și $|\alpha A \subset |\beta B$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Cum } A \in |\alpha A \\ |\alpha A \subset |\beta B \end{array} \right\} \Rightarrow A \in |\beta B \Rightarrow |\beta B = |\beta A$$

Atunci ipoteza se mai poate scrie $\alpha \neq \beta$ și $|\alpha A \subset |\beta A$. Să arătăm că $\alpha \cap \beta = \emptyset$. Prin reducere la absurd presupunem că $\alpha \cap \beta \neq \emptyset \Rightarrow (\exists) d = \alpha \cap \beta$ și fie $O \in d$, deci $O \in \alpha$ și $O \in \beta$. Ducem prin A și O un plan r și a.f. $d \in r$, deci cele trei plane α, β și r să nu treacă prin această dreaptă. Întrucât r are punctul O comun și cu α și cu β , va intersecta aceste plane.



$$\left. \begin{array}{l} r \cap \alpha = \delta' \\ r \cap \beta = \delta \end{array} \right\} \Rightarrow \delta \cap \delta' = O \text{ care este un punct comun}$$

celor 3 plane. Dreptele δ și δ' determină 4 unghiuri în planul r avînd O ca vîrf comun, $A \in \text{int. unuia dintre ele, fie } A \in \text{int. } \widehat{hk}$. Considerăm $C \in \text{int. } \widehat{hk}$.

Atunci C este de aceeași parte cu A față de δ' , deci C este de aceeași parte cu A față de $\alpha \Rightarrow C \in |\alpha A$.

Dar C este de partea opusă lui A față de δ , deci C este de partea opusă lui A față de $\beta \Rightarrow C \notin |\beta A$. Deci $|\alpha A \not\subset |\beta A$ - fals - contrazice ipoteza \Rightarrow Deci $\alpha \cap \beta = \emptyset$.

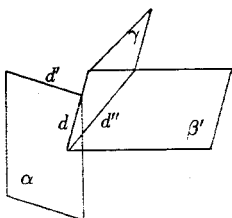
23) Să se arate că intersecția unui unghi diedru cu un plan α poate fi: un unghi drept, reuniunea a două drepte, o dreaptă, mulțimea vidă sau un semiplan închis și nu poate fi nici o

mulțime de alt tip.

Soluție:

Fie d muchia unghiului diedru dat. Poziția unei drepte față de un plan se pot distinge următoarele situații:

1) $d \cap \alpha = \{O\}$

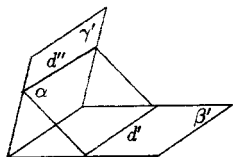


$$d \cap \alpha = \{O\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} O \in d \\ O \in \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} O \in \gamma \\ O \in \beta' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma' \cap \alpha = d' \\ \beta' \cap \alpha = d'' \end{cases}$$

Semidreapta cu originea în O , deci $\alpha \subset \widehat{\beta'\gamma'} = \widehat{d'd''}$ deci un unghi.

2) $d \cap \alpha = \emptyset$

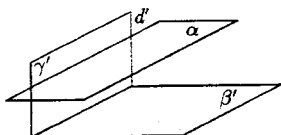


$$\left. \begin{aligned} \text{a) } \alpha \cap \beta' \neq \emptyset &\Rightarrow \alpha \cap \beta = d' \\ \alpha \cap \gamma' \neq \emptyset &\Rightarrow \alpha \cap \gamma' = d'' \end{aligned} \right\} \Rightarrow d' \parallel d''$$

Într-adevăr, dacă am presupune că $d' \cap d'' \neq \emptyset \Rightarrow (\exists) O \in d' \cap d''$

$$\Rightarrow \begin{cases} O \in d' \\ O \in d'' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} O \in \beta' \\ O \in \gamma' \\ O \in \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} O \in d \\ O \in \alpha \end{cases} \Rightarrow O \in d \cap \alpha, \text{ fals - contrazice ipoteza.}$$

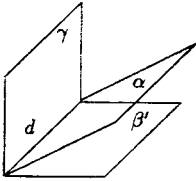
$$\text{b) } \left\{ \begin{aligned} \alpha \cap \beta' = d' \\ \alpha \cap \gamma' = \emptyset \end{aligned} \right. \text{ sau } \left\{ \begin{aligned} \alpha \cap \beta' = \emptyset \\ \alpha \cap \gamma' = d' \end{aligned} \right. \Rightarrow \text{în acest caz } \alpha \cap \widehat{\beta'\gamma'} = d'' - \text{o dreaptă.}$$



$$\text{c) } \left\{ \begin{aligned} \alpha \cap \beta' = \emptyset \\ \alpha \cap \gamma' = \emptyset \end{aligned} \right\} \text{ atunci } \alpha \cap \widehat{\beta'\gamma'} = \emptyset$$

3) $d \cap \alpha = d$

a)



$$d \cap \alpha = d \text{ dar } \alpha \neq \beta, \alpha \neq \gamma$$

$$\alpha \cap \widehat{\beta'\gamma'} = d \text{ deci intersecția este o dreaptă.}$$

b) $\alpha = \beta$ sau $\alpha = \gamma$.

Atunci intersecția este un semiplan închis.

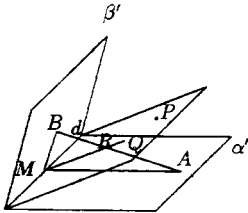
24) Fie d muchia unui diedru propriu $\widehat{\alpha'\beta'}$, $A \in \alpha' - d$, $B \in \beta' - d$ și $P \in \text{int. } \widehat{\alpha'\beta'}$.

Să se arate că:

1) $(Pd) \cap \text{int. } \widehat{\alpha'\beta'} = |dP$.

2) Dacă $M \in d$, $\text{int. } \widehat{AMB} = \text{int. } \widehat{\alpha'\beta'} \cap (ABM)$.

Soluție:



1) $\text{int. } \widehat{\alpha'\beta'} = |\alpha B \cap |\beta A$

$$P \in \text{int. } \widehat{\alpha'\beta'} \Rightarrow P \in \alpha B$$

$$P \in |\beta A$$

$$\alpha \cap (Pd) = d \xrightarrow{\text{pr. 4}} (Pd) \cap (\alpha B) \text{ este semiplan } P \in |\alpha B$$

$$\Rightarrow (Pd) \cap |\alpha B = dP \quad (*)$$

$$\left. \begin{array}{l} (Pd) \cap \beta = d \Rightarrow (Pd) \cap |\beta A \text{ este semiplan} \\ P \in |\beta A \end{array} \right\} \Rightarrow (Pd) \cap |\beta A = |dP \quad (**)$$

$$\text{Din } (*) \text{ și } (**) \Rightarrow (Pd) \cap |\alpha B \cap |\beta A = |dP \Rightarrow (Pd) \cap \text{int. } \widehat{\alpha'\beta'} = |dP$$

2) $(ABM) \cap \alpha = AM$ deci sînt plane secante $\xrightarrow{\text{pr. 4}} (ABM) \cap \beta A = |MB_1A$

$$\begin{aligned} (ABM) \cap \text{int. } \widehat{\alpha'\beta'} &= (ABM) \cap |\alpha B \cap |\beta A = [(ABM) \cap |\alpha B] \cap [(ABM) \cap |\beta A] = \\ &= |MB_1A \cap |MA_1B = \text{int. } \widehat{AMB}. \end{aligned}$$

25) Se consideră notațiile din problema precedentă. Să se arate că:

- 1) punctele A și B sînt de o parte și de alta a planului (dP) ;
- 2) segmentul $|AB|$ și semiplanul $|dP$ au un punct comun.

Soluție:

$$\left. \begin{array}{l} M \in d \Rightarrow M \in dP \\ M \in (ABM) \end{array} \right\} \Rightarrow (AMB) \cap (dP) = d' \text{ și } M \in d'$$

$$\left. \begin{array}{l} d' \subset (dP) \\ d' \cap d = M \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} |dP \cap d' = |MQ \\ \text{unde } Q \in |dP \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} |MQ \subset |dP \subset \text{int.} \widehat{\alpha' \beta'} \\ |MQ \subset d' \subset (AMB) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

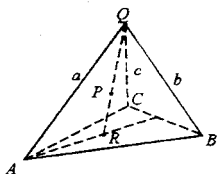
$$\Rightarrow |MQ \subset \text{int.}(\widehat{\alpha' \beta'}) \cap (ABM) \Rightarrow |MQ \subset \text{int.} \widehat{AMB} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} |MQ \subset |AB| = \{R\} \\ |MQ \subset |dP \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow |dP \cap |AB| = \{R\} \text{ și cum } |dP \subset (dP) \text{ avem } (dP) \cap |AB| = \{R\}$$

$$\Rightarrow \text{punctele } A \text{ și } B \text{ sînt de o parte și de alta a lui } (dP)$$

26) Dacă \widehat{abc} este un unghi triedru, $P \in \text{int.} \widehat{abc}$ și A, B, C sînt puncte pe muchiile a, b, c diferite de O , atunci semidreapta $|OP$ și $\text{int.} \widehat{ABC}$ au un punct comun.

Soluție:



Fie semidreptele $\alpha' = |OA_1B$, $\beta = |OA_1C$, $\gamma' = |OA_1P$.

P fiind interior triedrului este interiorul diedrului format din oricare simplane ce trece prin O ale triedrului, deci

$$\left. \begin{array}{l} P \in \text{int.} \widehat{\alpha' \beta'} \\ B \in \alpha' \\ C \in \gamma \end{array} \right\} \Rightarrow |BC| \cap \gamma' = \{Q\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Deci } P \in |OA_1P \\ Q \in |OA_1P = \gamma' \end{array} \right\} \Rightarrow P \text{ și } Q \text{ se află în același semiplan det. } OA \Rightarrow P \text{ și } Q \text{ sînt de aceeași parte a lui } OA \quad (1).$$

$$P \in \text{int.} \widehat{abc} \Rightarrow P \in |OAC, A \Rightarrow P \text{ și } A \text{ sînt de aceeași parte a lui } (OBC) \cap \gamma' \Rightarrow P \text{ și } A \text{ sînt de aceeași parte a lui } OQ \quad (2).$$

$$\text{Din } (1) \text{ și } (2) \Rightarrow P \in \text{int.} \widehat{AOQ} \xrightarrow{\text{T. transv.}} |AQ| \cap |OP| = \{R\} \Rightarrow R \in |AQ|, |AQ| \subset \text{int.} \widehat{ABC}$$

$$\Rightarrow R \in \text{int.} ABC \Rightarrow |OP \cap \text{int.} ABC = \{R\}.$$

27) Să se arate că orice intersecție de mulțimi convexe este mulțime convexă.

Soluție:

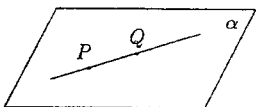
Fie M și M' două mulțimi convexe și $M \cap M'$ intersecția lor. Fie

$$\Rightarrow PQ \in M \cap M', P \neq Q \Rightarrow \left. \begin{array}{l} P \in M \cap Q \in M \\ P \in M' \cap Q \in M' \end{array} \right\} \xrightarrow{M, M' \text{ convexe}} \left\{ \begin{array}{l} |PQ| \subset M \\ |PQ| \subset M' \end{array} \right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow |PQ| \subset M \cap M'$ deci intersecția este convexă.

28) Să se arate că următoarele mulțimi sînt convexe planele, semiplanele, orice semispațiu închis sau deschis și interiorul unui unghi diedru.

Soluție:



a) Fie $P, Q \in \alpha$; $P \neq Q \Rightarrow |PQ| = PQ$ (dreapta este mulțime convexă).

$PQ \subset \alpha$, deci $|PQ| \subset \alpha$ deci planul este mulțime convexă.

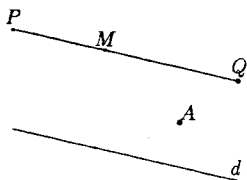
b) **Semiplanele:** Fie $S = |dA$ și $P, Q \in S \Rightarrow |PQ| \cap d = \emptyset$. Fie $M \in |PQ| \Rightarrow |PM| \subset |PQ| \Rightarrow |PM| \cap d = \emptyset \Rightarrow P$ și M sînt în același semiplan $\Rightarrow M \in S$. Deci $|PQ| \subset S$ și S este o mulțime convexă.

Fie $S' = [dA$. Sînt trei cazuri:

1) $P, Q \in |dA$ tratat anterior;

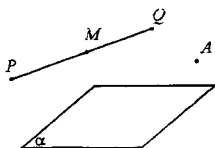
2) $P, Q \in d \Rightarrow |PQ| \subset d \subset S'$;

3) $P \in d, Q \notin d \Rightarrow |PQ| \subset |dQ \Rightarrow |PQ| \subset |dA \subset [dA$ deci $[dA$ este mulțime convexă.



c) **Semispațiile:** Fie $\sigma = |\alpha A$ și fie $P, Q \in \sigma \Rightarrow |PQ| \cap \alpha = \emptyset$.

Fie $M \in |PQ| \Rightarrow |PM| \subset |PQ| \Rightarrow |PM| \cap \alpha = \emptyset$

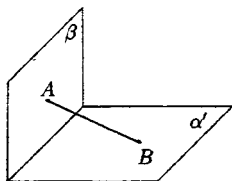


Fie $\sigma' = |\alpha A$. Sînt trei cazuri:

- 1) $P, Q \in |\alpha A$ tratat anterior;
- 2) $P, Q \in \alpha \Rightarrow |PQ| \subset \alpha \subset \sigma'$;
- 3) $P \in \alpha, Q \notin \alpha$

$P, Q \in \sigma' \Rightarrow |PQ| \subset \sigma' \Rightarrow |PQ| \subset \sigma'$ și deci σ' este mulțime convexă.

d) interiorul unui unghi diedru:



int. $\widehat{\alpha'\beta'} = |\alpha A| \cap |\beta B$ și cum fiecare semispațiu este mulțime convexă și intersecția lor este mulțimea convexă.

29) Poate fi un unghi diedru o mulțime convexă?

Soluție:

Nu. Unghiul diedru nu este o mulțime convexă, întrucît dacă luăm ca în desenul anterior $A \in \beta'$ și $B \in \alpha'$.

$(\forall) P \in \text{int.} \widehat{\alpha'\beta'}, |dP| \cap |AB| \neq \emptyset$

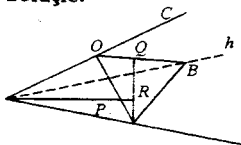
$\Rightarrow \left. \begin{aligned} &(\exists) M \in |AB| \text{ a.i. } M \in \text{int.} \widehat{\alpha'\beta'} \\ &M \notin \alpha', M \notin \beta' \end{aligned} \right\} \Rightarrow |AB| \not\subset \widehat{\alpha'\beta'}$. Numai în cazul unghiului nul sau plat,

cînd unghiul diedru se transformă în plan sau semiplan închis, este mulțime convexă.

30) Care din următoarele mulțimi sînt convexe:

- a) un unghi triedru;
- b) interiorul său;
- c) reuniunea fețelor sale;
- d) reuniunea interiorului cu toate fețele sale?

Soluție:



a) Nu. Unghiul triedru nu este mulțimea convexă, întrucît, dacă luăm $A \in a$ și $Q \in \text{int.} \widehat{bc}$ determinat de $P \in \text{int.} \widehat{abc}$, $(\exists) R$ a.f. $|OP \cap \text{int.} ABC = \{R\}$, $R \in |AQ|$, $R \notin \widehat{abc}$

Deci $A, Q \in \widehat{abc}$, dar $|AQ| \not\subset \widehat{abc}$

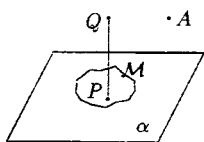
$\beta = (\angle OCA)$, $\gamma = (\angle OAB)$ este mulțime convexă ca intersecție de mulțimi convexe.

c) Este aceeași mulțime ca la a) și nu este convexă.

d) Mulțimea respectivă este $[\alpha A \cap [\beta B \cap [\gamma C$, intersecție de mulțimi convexe și deci este convexă.

31) Fie σ un semispațiu deschis limitat de planul α și M o mulțime convexă închisă în planul α . Să se arate că mulțimea $M \cap \sigma$ este convexă.

Soluție:



Fie $\sigma = |\alpha A$ și $M \subset \alpha$. Fie $P, Q \in M \cap \sigma$.

Apar cazurile:

a) $P, Q \in \sigma \Rightarrow |PQ| \subset \sigma \subset M$;

b) $P, Q \in M \Rightarrow |PQ| \subset M \subset \sigma \cap M$;

c) $P \in M, Q \in \sigma$ ^{pr. 1, pag. 58} $|PQ| \subset \sigma \subset \sigma \cap M$.

32) Să se arate că intersecția sferei $S(O, r)$ cu un plan ce trece prin O , este un cerc.

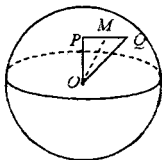
Soluție:

$$S(O, r) = \{M \in S \mid \|OM\| = r\}.$$

$$S(O, r) \cap \alpha = \{M \in S \mid M \in S(O, r) \cap M \alpha \cap \|OM\| = r\} = \{M \in \alpha \mid \|OM\| = r\} = C(O, r)$$

33) Demonstrați că $\text{int}.S(O, r)$ este o mulțime convexă.

Soluție:



Fie $P, Q \in \text{int}.S(O, r) \Rightarrow \|OP\| < r, \|OQ\| < r$.

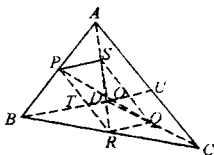
În planul (OPQ) , fie $M \in (PQ)$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow \|OM\| < \|OP\| < r \\ \text{sau} \\ \|OM\| < \|OQ\| < r \end{array} \right\} \Rightarrow \|OM\| < r$$

$$\Rightarrow M \in S(O, r) (\forall) M \in |PQ| \Rightarrow |PQ| \subset S(O, r)$$

34) Să se arate ca unind mijloacele muchiilor opuse ale unui tetraedru se obțin drepte concurente.

Soluție:



Fie: P mijlocul lui $|AB|$

R mijlocul lui $|BC|$

Q mijlocul lui $|DC|$

S mijlocul lui $|AD|$

T mijlocul lui $|BD|$

U mijlocul lui $|AC|$

În triunghiul ABC : $|RP|$ l.m. $\|PR\| = \frac{\|AC\|}{2}$; $PR \parallel AC$.

În triunghiul DAC : $|SQ|$ l.m. $\|SQ\| = \frac{\|AC\|}{2}$; $SQ \parallel AC$.

$\Rightarrow \|PR\| = \|SQ\|, PR \parallel SQ \Rightarrow PRSQ$ paralelogram $\Rightarrow |PQ|$ și $|SR|$ se intersectează în mijlocul lor O .

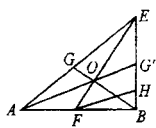
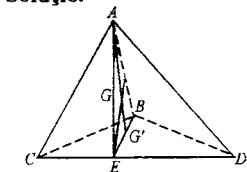
$$\left. \begin{array}{l} \|ST\| = \frac{\|AB\|}{2}, \quad \|OR\| = \frac{\|AB\|}{2} \\ ST \parallel AB \quad UR \parallel AB \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \|ST\| = \|UR\| \\ ST \parallel UR \end{array} \right\} \Rightarrow STRU - \text{paralelogram.}$$

$\Rightarrow |TU|$ trece prin mijlocul O al lui $|SR|$.

Deci cele trei drepte PR, SR, TU sînt concurente în O .

35) Să se arate că dreptele care unesc virfurile unui tetraedru cu centrele de greutate ale fețelor opuse sînt concurente în același punct ca cele trei drepte din exemplul precedent.

Soluție:



Fie tetraedrul $ABCD$ și E mijlocul lui $[CD]$. Centrul de greutate G al feței ACD se află pe $[AE]$ la o treime de bază. Centrul de greutate G' al feței BCD se află pe $[BE]$ la o treime de bază $[CD]$.

Desprindem separat $\triangle AEB$. Fie F mijlocul lui AB , deci EF este mediană în acest triunghi iar în problema precedentă a fost unul din cele 3 segmentele concurente într-un punct situat la mijlocul fiecăreia.

Fie O mijlocul lui $[EF]$. Notăm $AO \cap EB = \{G'\}$ și $BG \cap EA = \{G\}$.

$$|AF| \equiv |FB| \Rightarrow |FH| \text{ m. în } ABG' \Rightarrow |BH| \equiv |HG'| \quad (1)$$

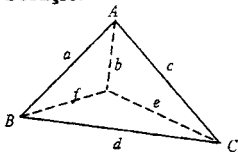
$$\left. \begin{array}{l} \text{Din } OG' \parallel FH \\ |EO| \equiv |OF| \end{array} \right\} \Rightarrow |OG'| \text{ l.m. în } \triangle EFH \Rightarrow |EG'| \equiv |G'H| \quad (2)$$

Din (1) și (2) $\Rightarrow |EG'| \equiv |G'H| \equiv |HB| \Rightarrow \frac{|EG'|}{|EB|} = \frac{1}{3} \Rightarrow G'$ este tocmai centrul de greutate al feței BCD , întrucît este situat pe mediana $[EB]$ la o treime de E . La fel se arată că G este tocmai centrul de greutate al feței ACD . S-a arătat deci că BG și AG' trec prin punctul O al problemei precedente.

Alegînd fețele ACD și ACB și notînd cu G'' centrul de greutate al feței ACB , se arată la fel că BG și DG'' trec prin mijlocul segmentului $[MN]$ ($|AM| \equiv |MC|$, $|BN| \equiv |ND|$) deci tot prin punctul O etc.

36) Fie $ABCD$ un tetraedru. Se consideră unghiurile triedre care au ca muchii $[AB]$, $[AE]$, $[AD]$, $[BA]$, $[BC]$, $[BD]$, $[CA]$, $[CB]$, $[CD]$, $[DA]$, $[DB]$, $[DC]$. Să se arate că intersecția interioarelor acestor 4 unghiuri triedre coincide cu interiorul tetraedrului $[ABCD]$.

Soluție:



Notăm planele $(ABC) = \alpha$, $(ADC) = \beta$, $(BDC) = \gamma$, $(ABD) = \delta$.

Fie M intersecția interioarelor celor 4 unghiuri treidre.

Arătăm că:

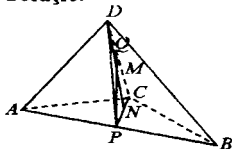
$M = \text{int.}[ABCD]$, prin dublă incluziune

1) $P \in M \Rightarrow P \in \text{int.} \widehat{abc} \cap \text{int.} \widehat{afd} \cap \text{int.} \widehat{dec} \cap \text{int.} \widehat{bfc} \Rightarrow P \in |\alpha D \cap \gamma C \cap \beta B|$ și $P \in |\delta A \cap \gamma C \cap \beta B| \Rightarrow P \in |\alpha D|$ și $P \in |\beta B|$ și $P \in |\gamma C|$ și $P \in |\delta C| \Rightarrow P \in |\alpha D \cap \beta B \cap \gamma C \cap \delta A| \Rightarrow P \in \text{int.} [ABCD]$. Deci $M \in [ABCD]$.

2) Urmărind raționamentul invers se arată că $[ABCD] \subset M$ de unde egalitatea.

37) Să se arate că $(\forall) M \in \text{int.}[ABCD] (\exists) P \in |AB|$ și $Q \in |CD|$ a.i. $M \in |PQ|$.

Soluție:



$M \in \text{int.}[ABCD] \Rightarrow (\exists) N \in \text{int.} ABC$ a. i.

$M \in |DN|$, $N \in \text{int.} ABC \Rightarrow (\exists) P \in |AB|$ a.i. $n \in |CP|$.

$(ADB) \cap (DPC) = DP$

Din $N \in |CP|$ și $M \in |DN| \xrightarrow{\text{leme}} \text{int.} DPC \Rightarrow$

$\Rightarrow M \in \text{int.} DPC \Rightarrow (\exists) Q \in |DC|$ a.i. $|PQ|$.

Deci s-a arătat că $(\exists) P \in |AB|$ și $Q \in |DC|$ a.i. $M \in |PQ|$.

38) Interiorul tetraedrului $[ABCD]$ coincide cu reuniune segmentelor $|PQ|$ cu $P \in |AB|$ și $Q \in |CD|$, iar tetraedrul $[ABCD]$ este egal cu reuniunea segmentelor închise $[PQ]$, când $P \in [AB]$ și $Q \in [CD]$.

Soluție:

Fie \mathcal{M} reuniunea segmentelor deschise $|PQ|$. Trebuie să arătăm că: $\text{int.}[ABCD] = \mathcal{M}$ prin dublă incluziune.

1) Fie $M \in \text{int.}[ABCD] \Rightarrow (\exists) P \in |AB|$ și $Q \in |CD|$ a.i. $M \in |PQ| \Rightarrow M \in \mathcal{M}$ și deci $\text{int.}[ABCD] \subset \mathcal{M}$.

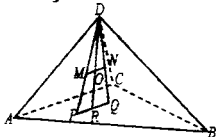
2) Fie $M \in \mathcal{M} \Rightarrow (\exists) P \in |AB|$ și $Q \in |CD|$ a. i. $M \in |PQ|$. Punctele D, C și P determină planul (PDC) și $(PDC) \cap (ACB) = PC$, $(PUC) \cap (ADB) = PD$.

Întrucît $(\exists) Q \in |CD|$ a. i. $M \in |PQ| \Rightarrow M \in [PCD] \Rightarrow (\exists) R \in [PC]$ a. i. $M \in [DR]$. Dacă $P \in |AB|$ și $R \in [PC] \Rightarrow R \in \text{int.} ACB$ a. i. $M \in [DR] \Rightarrow M \in \text{int.} [ABCD] \Rightarrow \mathcal{M} \subset \text{int.} [ABCD]$.

Lucrînd cu segmentele închise se obține că $(\exists) R \in [ACB]$ a. i. $M \in [DR]$ obținîndu-se tetraedrul $[ABCD]$.

39) Tetraedrul este o mulțime convexă.

Soluție:



Fie $M \in [ABCD] \Rightarrow (\exists) P \in [ABC]$ a. i. $M \in [DP]$.

Fie $N \in [ABCD] \Rightarrow (\exists) Q \in [ABC]$ a. i. $N \in [DQ]$.

Dreptele concurente DM și DN determină unghiul DMN

Suprafața triunghiului DPQ este o mulțime convexă

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} M \in [DPQ] \\ N \in [DPQ] \end{array} \right\} \Rightarrow [MN] \subset [DPQ].$$

Fie $O \in [MN] \Rightarrow O \in [DPQ] \Rightarrow (\exists) R \in [PQ]$ a. i. $O \in [DR]$. Dar $[PQ] \subset [ABC]$ deoarece $P \in [ABC] \cap Q \in [ABC]$ și suprafața triunghiului este convexă. Deci $(\exists) R \in [ABC]$ a. i. $O \in [DR] \Rightarrow O \in [ABCD]$, $(\forall) O \in [MN] \Rightarrow [MN] \subset [ABCD]$ și tetraedrul este o mulțime convexă.

Observație: Tetraedrul mai poate fi privit și ca intersecția a patru semispații închise care sînt mulțimi convexe.

40) Fie \mathcal{M}_1 și \mathcal{M}_2 mulțimi convexe. Să se arate că reunind segmentele $[PQ]$, pentru care $P \in \mathcal{M}_1$ și $Q \in \mathcal{M}_2$, se obține o mulțime convexă.

Soluție:

Fie \mathcal{M} reuniunea segmentelor $[PQ]$ cu $P \in \mathcal{M}_1$ și $Q \in \mathcal{M}_2$.

Fie $x, x' \in \mathcal{M} \Rightarrow (\exists) P \in \mathcal{M}_1$ și $Q \in \mathcal{M}_2$ a. i. $x \in [PQ]$;

$(\exists) P' \in M_1$ și $Q \in M$ a.f. $x' \in [P'Q]$.

Din $P, P' \in M_1 \Rightarrow [PP'] \in M_1$ care este mulțime convexă.

Din $Q, Q' \in M_2 \Rightarrow [QQ'] \in M_2$ care este mulțime convexă.

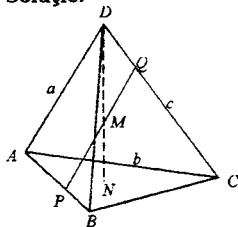
Reuniunea tuturor segmentelor $[MN]$ cu $M \in [PP']$ și $N \in [QQ']$ este tetraedrul $[PP'QQ'] \subset M$, întrucât $M \in M_1$ și $M \in M_2$.

Dar tetraedrul $[PP'QQ']$ este o mulțime convexă, deci din $x, x' \in [PP'QQ'] \Rightarrow [xx'] \subset [PP'QQ'] \in M$.

Deci din $x, x' \in M \Rightarrow [xx'] \subset M$, deci mulțimea M este convexă.

41) Să se arate că interiorul unui tetraedru coincide cu intersecția semispațiilor deschise determinate de planele fețelor și vîrfurile opuse respectiv. Caracterizați tetraedrul ca o intersecție de semispații.

Soluție:



Interiorul tetraedrului coincide cu reuniunea segmentelor $|PQ|$, $P \in |AB|$ și $Q \in |CD|$, adică

$$\text{int.}[ABCD] = \{|PQ| \mid P \in |AB|, Q \in |CD|\}.$$

Să arătăm că:

$$\text{int.}[ABCD] = |(ABC), D| \cap |(ABD), C| \cap |(ADC), B| \cap |(DBC), A|.$$

1) Fie $M \in \text{int.}[ABCD] \Rightarrow P \in |AB|$ și $Q \in |DC|$ a.f. $M \in |PQ|$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Din } P \in |AB| \Rightarrow B \notin |AP| \Rightarrow |AP| \cap |(BDC), A| = \emptyset \Rightarrow \\ P \in |(BDC), A| \\ P \in (BDC) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |PQ| \subset |(BDC), A; M \in |PQ| \Rightarrow M \in |(BDC), A \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Din } P \in |AB| \Rightarrow A \notin |PB| \Rightarrow |PB| \cap |(ADC), B| = \emptyset \Rightarrow P \in |(ADC), B; Q \in (ADC) \Rightarrow \\ |PQ| \subset |(ADC), B \Rightarrow M \in |(ADC), B \end{array} \right\} \Rightarrow \quad (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} Q \in |DC| \Rightarrow D \notin |QC| \Rightarrow |QC| \cap |(ABD), C| = \emptyset \Rightarrow Q \in |(ABD), C \\ P \in (ABD) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |PQ| \subset |(ABD), C \Rightarrow M \in |(ABD), C \quad (3)$$

$$Q \in |DC| \Rightarrow C \notin |DQ| \Rightarrow |DQ| \cap (ABC) = \emptyset \Rightarrow \left. \begin{array}{l} Q \in |(ABC), D \\ P \in (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |PQ| \subset |(ABC), D \Rightarrow M \in |(ABC), D \quad (4)$$

Din (1),(2),(3),(4) $\Rightarrow M \in |(BDC), A \cap |(ADC), B \cap |(ABD), C \cap |(ABC), D$
deci: $\text{int.}[ABCD] \subset |(BDC), A \cap |(ADC), B \cap |(ABD), C \cap |(ABC), D$.

2) Fie $M \in |(BDC), A \cap |(ADC); B \cap |(ABD), C \cap |(ABC), D \Rightarrow M \in |(BDC), A \cap |(ADC), B \cap |(ABD), C \Rightarrow M \in \text{int. } \widehat{abc} \Rightarrow |DM| \cap \text{int.} ABC = \{N\}$. Dacă presupunem $N \in |DM| \Rightarrow |DM| \cap (ABC) \neq \emptyset \Rightarrow M$ și D sînt în semispații diferite față de $(ABC) \Rightarrow M \notin (ABC), D$, fals (contrazice ipoteza).

Deci $M \in |DN|, (\exists) N \in \text{int.} ABC$ a.i. $M \in |DN| \Rightarrow M \in \text{int. } [ABCD]$ și incluziunea a doua este dovedită.

În cazul tetraedrului: $[ABCD] = \{|PQ| \mid P \in [AB] \text{ și } Q \in [CD]\}$

Dacă $P = A, Q \in [CD], [PQ]$ descrie fața $[ADC]$

$P = B, Q \in [CD], [PQ]$ descrie fața $[BDC]$

$Q = C, P \in [AB], [PQ]$ descrie fața $[ABC]$.

Întrucît suprafețele triunghiulare sînt mulțimi convexe și odată cu două puncte ale lor P, Q segmentul $[PQ]$ este inclus în suprafața respectivă.

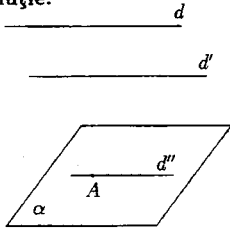
Deci la egalitatea din cazul anterior adăugînd și aceste cazuri obținem:

$$[ABCD] = |(BCD), A \cap |(ACD), B \cap |(ABD), C \cap |(ABC), D.$$

Drepte și plane

1) Fie d, d' două drepte paralele. Dacă dreapta d este paralelă cu un plan α , să se arate că $d' \parallel \alpha$ sau $d' \subset \alpha$.

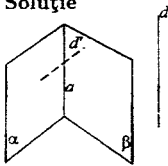
Soluție:



$$\left. \begin{array}{l} \text{Fie } A \in \alpha \\ d \parallel \alpha \\ d'' \parallel d \\ d' \parallel d \\ d'' \parallel d \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} d'' \subset \alpha \\ d' \parallel d'' \end{array} \right\} \Rightarrow d'' \parallel \alpha \text{ sau } d' \subset \alpha$$

2) Se consideră o dreaptă d , paralelă cu planele α și β , care se intersectează după dreaptă a . Arătați că $d \parallel a$.

Soluție



Fie $A \in a \Rightarrow A \in \alpha \cap A \in \beta$. Ducem prin A , $d' \parallel d$.

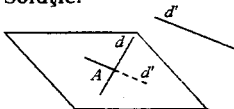
$$\left. \begin{array}{l} A \in \alpha, \\ d \parallel \alpha \\ d' \parallel d \end{array} \right\} \Rightarrow d' \subset \alpha$$

$$\left. \begin{array}{l} A \in \beta, \\ d \parallel \beta \\ d' \parallel d \end{array} \right\} \Rightarrow d' \subset \beta$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} d' \subset \alpha \subset \beta \\ \alpha \cap \beta = a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} d' = a \\ d' \parallel d \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel d$$

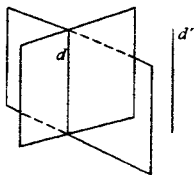
3) Printr-o dreaptă dată d ducem un plan paralel cu o altă dreaptă dată d' . Discuțați numărul soluțiilor.

Soluție:



a) Dacă $d \nparallel d'$ soluția este unică și se obține astfel:

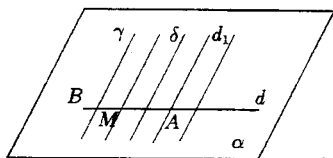
Fie $A \in d$. În planul (A, d') ducem $d'' \parallel d'$. Dreptele concurente d și d'' determină planul α . Cum $d' \parallel d'' \Rightarrow d \parallel \alpha$, în cazul dreptelor necoplanare.



- b) dacă $d \parallel d'$, (\exists) o infinitate de soluții. Orice plan care trece prin d este paralelă cu d' , cu excepția planului (d, d') .
c) $d \nparallel d'$, dar sînt coplanare (β) soluții.

4) Să se determine reuniunea dreptelor care intersectează o dreaptă dată d și sînt paralele cu o altă dreaptă dată d' ($d \nparallel d'$).

Soluție:



Fie $A \in d$, ducem prin A , $d_1 \parallel d'$.

Notăm $\alpha = (d, d_1)$. Cum $d' \parallel d_1 \Rightarrow d' \parallel \alpha$.

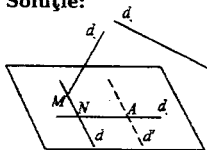
Fie $M \in d$, arbitrar $\Rightarrow M \in \alpha$.

Ducem $\delta \parallel d'$, $M \in \delta$
 $d' \parallel \alpha$ } $\Rightarrow \delta \subset \alpha$ deci toate paralelele la d' și care intersectează d sînt conținute în planul α .

Fie $\gamma \subset \alpha$, $\gamma \parallel d' \Rightarrow \gamma \cap d = B$, deci (\forall) paralelă la d' din α intersectează pe d . Deci planul α reprezintă reuniunea cerută.

5) Să se construiască o dreaptă care întilnește două drepte date și este paralelă cu o a treia dreaptă dată. Discuție.

Soluție:



Prin M ducem d a.i. $d \parallel d'$
 $d' \parallel d_3$ } \Rightarrow

$\Rightarrow d \parallel d_3$. Conform problemei 4: $d \cap d_1 = \{N\}$.

Deci $d \cap d_2 = \{M\}$

$d \cap d_1 = \{N\}$

$d \parallel d_3$

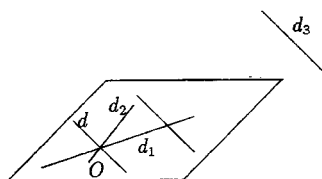
a) Dacă $d_3 \nparallel d_1$, pl. α este unic și dacă $d_2 \cap \alpha \neq \emptyset$, soluția este unică.

b) Dacă $d_1 \parallel d_3$, nu $(\exists) \begin{matrix} d \parallel d_1 \\ d \cap d_1 \neq \emptyset \end{matrix}$ căci ar însemna că printr-un punct putem duce două paralele d, d_1 la aceeași dreaptă d_3 .

Deci nu există soluție.

c) Dacă $d_1 \nparallel d_3$ și $d_2 \cap \alpha = \emptyset$ toate paralele la d_2 care taie pe d_1 sînt în planul α și nici una nu poate intersecta pe d_2 , deci problema nu are soluții.

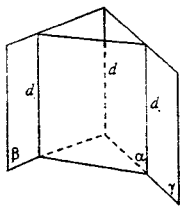
d) Dacă $d_2 \subset \alpha, d_1 \cap d_2 \neq \emptyset$, fie $d_1 \cap d_2 = \{O\}$ și dreapta căutată este paralelă la d_3 dusă prin $O \Rightarrow$ o soluție.



e) dacă $d_2 \subset \alpha, d_2 \parallel d_1$. Problema are o infinitate de soluții, $(\forall) \parallel$ la d_3 care taie pe d_1 , taie și pe d_2 .

6) dacă un plan α intersectează planele secante după drepte paralele, atunci α este paralel cu dreapta $\beta \cap \gamma$.

Soluție:



Fie: $\beta \cap \gamma = d$

$$\alpha \cap \beta = d_1$$

$$\alpha \cap \gamma = d_2$$

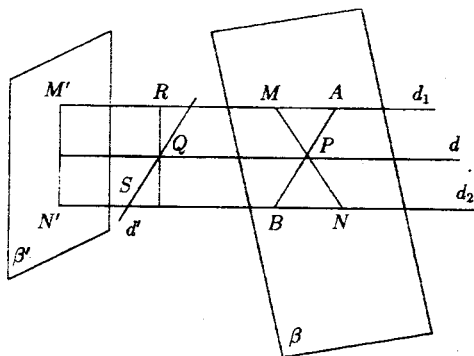
$$d_1 \parallel d_2$$

$$\left. \begin{matrix} d_1 \parallel d_2 \Rightarrow d_1 \parallel \gamma \\ d_1 \subset \beta \end{matrix} \right\} \Rightarrow \beta \cap \gamma = d$$

$$\left. \begin{matrix} d = d_1 \\ d_1 \subset \alpha \end{matrix} \right\} \Rightarrow d \parallel \alpha$$

7) Un plan variabil taie două drepte paralele în punctele M și N . Să se afle locul geometric al mijlocului segmentului $[MN]$.

Soluție:

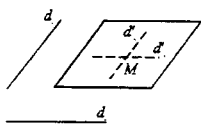


$$d_1 \parallel d_2 \Rightarrow (\exists) \alpha = (d_1, d_2)$$

Problema se reduce la locul geometric al mijloacelor segmentelor care au extremități pe două drepte paralele P un astfel de punct $|MP| = |PN|$. Ducem $AB \perp d_1 \Rightarrow AB \perp \widehat{MPA} = \widehat{BPN} \Rightarrow \triangle MAP = \triangle NBP \Rightarrow |PA| \equiv |PB| \Rightarrow |AP| \parallel ? \Rightarrow$ Locul geometric este paralela la d_1 și d_2 dusă pe mijlocul distanței dintre ele. Se arată și reciproc.

8) Se dau două drepte. Duceți printr-un punct dat un plan paralel cu ambele drepte.
Discuție.

Soluție:



$$M \notin d_1, M \notin d_2.$$

Fie $d_1 \nparallel d_2$. În planul (d, M) ducem $d'_1 \parallel d_1, M \in d'_1$. În planul $(d_2 M)$ ducem $d'_2 \parallel d_2, M \in d'_2$. Notăm $\alpha = (d'_1, d'_2)$ planul determinat de două drepte concurente.

$$d_1 \parallel d'_1 \Rightarrow d_1 \parallel \alpha, M \in \alpha \text{ soluție unică.}$$

$$d_1 \parallel d'_2 \Rightarrow d_2 \parallel \alpha$$

Fie $d_1 \parallel d_2, N \notin d_1, M \notin d_2$.

$$d_1 = d'_1 = d'_2$$

În acest caz $d'_1 = d'_2 = d$ și prin d trec o infinitate de plane $\left. \begin{matrix} d_2 \parallel d \\ d_1 \parallel d \end{matrix} \right\} \Rightarrow d_1 \text{ și } d_2 \text{ sînt paralele}$

cu (\forall) din planele ce trec prin d .

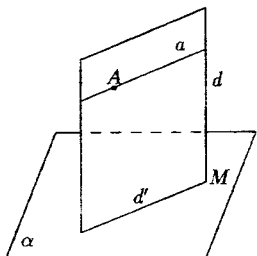
Problema are o infinitate de soluții. Dar $M \in d_1$ sau $M \in d_2$, problema nu are soluții fiindcă planul nu poate trece printr-un punct al unei drepte și să fie paralel cu ea.

9) Să se construiască o dreaptă care trece printr-un punct dat, este paralelă cu un plan dat și intersectează o dreaptă dată. Discuție.

Soluție:

Fie A punctul dat, α planul dat și d dreapta dată.

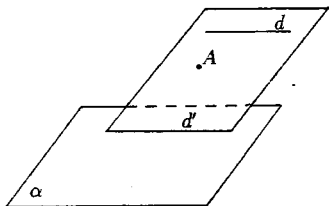
a) Presupunem că $d \nparallel \alpha$, $d \cap \alpha = \{M\}$. Fie planul (dA) care are un punct comun M cu $\alpha \Rightarrow (dA) \cap \alpha = d'$.



Ducem în planul (dA) prin punctul A o paralelă a la d .

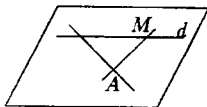
$$\left. \begin{matrix} a \parallel d' \\ d' \cap d = \{M\} \\ a \parallel d \\ d' \in \alpha \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} a \cap d \neq \emptyset \\ \Rightarrow a \parallel \alpha, A \in a \end{matrix} \right\} \left. \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} \right\} a \text{ este dreapta căutată.}$$

b) $d \parallel \alpha$, $(dA) \cap \alpha \neq \emptyset$



Fie $(dA) \cap \alpha = \alpha'$ $\left. \begin{matrix} \text{Fie } (dA) \cap \alpha = \alpha' \\ d \parallel d \end{matrix} \right\} \Rightarrow d' \parallel d$
Toate dreptele care trec prin A și intersectează d sînt conținute în planul (dA) . Dar toate aceste drepte taie și pe $d' \parallel d$, deci nu pot fi paralele cu α . Nu există soluție.

c) $d \parallel \alpha$, $(dA) \cap \alpha = \emptyset$.



$$\left. \begin{array}{l} \text{Fie } M \in d \text{ și dreapta } AM \subset (dA) \\ (dA) \cap \alpha = \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow AM \cap \alpha = \emptyset \Rightarrow$$

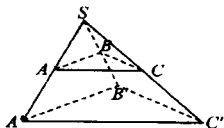
$$\Rightarrow AM \parallel \alpha, (\forall) M \in d.$$

Problema are o infinitate de soluții.



10) Să se arate că dacă triunghiurile ABC și $A'B'C'$ situate în plane diferite, au $AB \parallel A'B'$, $AC \parallel A'C'$ și $BC \parallel B'C'$, atunci dreptele AA' , BB' , CC' sînt concurente sau paralele.

Soluție:



(ABC) și $(A'B'C')$ sînt plane distincte deci cele șase puncte A, B, C, A', B', C' nu pot fi coplanare.

$AB \parallel A'B' \Rightarrow A, B, A', B'$ sînt coplanare.

Sînt coplanare cîte 4 puncte și anume $(ABB'A')$, $(ACC'A')$, $(BCC'B')$ determinînd 4 plane distincte. Dacă am presupune că planele coincid două cîte două, ar rezulta alte 6 puncte coplanare ceea ce este fals.

În planul $ABB'A'$, dreptele AA' , BB' pot fi paralele sau concurente.

Presupunem întîi că:

$$AA' \cap BB' = \{S\} \Rightarrow S \in AA' \cap S \in BB'$$

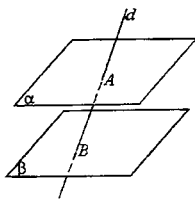
$$\left. \begin{array}{l} S \in AA' \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} S \in (ABB'A') \\ S \in (ACC'A') \end{array} \right\} \\ S \in BB' \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} S \in (BCC'B') \\ S \in (ABB'A') \end{array} \right\} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{este punct comun celor 3 plane distincte dar, intersecția}$$

a 3 plane distincte nu poate fi decît un punct, o dreaptă sau \emptyset . O dreaptă nu poate fi, întrucît dreptele

$$\left. \begin{aligned} (ABB'A') \cap (ACC'A') &= AA' \\ (ABB'A') \cap (BCC'B') &= BB' \\ (ACC'A') \cap (BCC'B') &= CC' \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{sînt distincte dacă am presupune că două din ele coincid,}$$

cele 6 puncte ar fi coplanare, deci nu există o dreaptă comună tuturor celor trei plane. Mai rămîne posibilitatea să aibă un punct comun, punctul S și din

$$\left. \begin{aligned} S &\in (ACC'A') \\ S &\in (CC'B'B') \end{aligned} \right\} \Rightarrow S \in CC' \Rightarrow$$

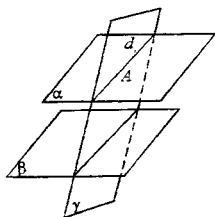


$$\alpha \parallel \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta = \emptyset$$

Presupunem $d \cap \beta = \emptyset \Rightarrow d \parallel \beta \Rightarrow d \in \text{pl. } \parallel \beta$ dus prin $A \Rightarrow d \subset \alpha$, fals. Deci $d \cap \beta = \{B\}$.

11) Arătați că dacă două plane sînt paralele, atunci un plan, care intersectează pe unul din ele după o dreaptă, taie și pe celălalt.

Soluție:



$$\text{ipoteză: } \alpha \parallel \beta, \gamma \cap \alpha = d_1$$

$$\text{concluzie: } \gamma \cap \beta = d_2$$

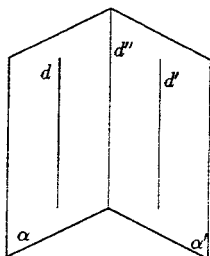
. Presupunem că $\gamma \cap \beta = \emptyset \Rightarrow \gamma \parallel \beta$.

Fie $A \in d_1 \Rightarrow \begin{cases} A \in \alpha, \alpha \parallel \beta \\ A \in \gamma, \gamma \parallel \beta \end{cases} \Rightarrow a = \gamma$ pentru că dintr-un punct se poate duce un singur plan paralel cu planul dat.

Dar acest rezultat este fals, contrazice ipoteză $\alpha \cap \gamma = d_1$, deci $\gamma \cap \beta = d_2$.

12) Prin drepte paralele d și d' se duc respectiv planele α și α' , distincte de (d, d') . Să se arate că $\alpha \parallel \alpha'$ sau $(\alpha \cap \alpha') \parallel d$.

Soluție:



ipoteză: $d \parallel d'$; $d \subset \alpha, d' \subset \alpha'$; $\alpha, \alpha' \neq (dd')$

concluzie: $\alpha \parallel \alpha'$ sau $d'' \parallel d$

Cum $\alpha, \alpha' \neq (dd') \Rightarrow \alpha \neq \alpha'$.

1. Dacă $\alpha \cap \alpha' = \emptyset \Rightarrow \alpha \parallel \alpha'$.

2. Dacă $\alpha \cap \alpha' \neq \emptyset \Rightarrow \alpha \cap \alpha' = d''$.

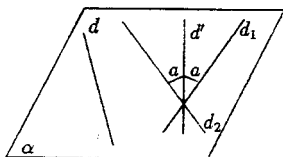
Dacă $d \parallel d'$
 $d' \subset \alpha' \Rightarrow \left. \begin{array}{l} d \parallel \alpha' \\ d \subset \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow d'' \parallel d$

13) Se dau un plan α , un punct $A \in \alpha$ și o dreaptă $d \subset \alpha$.

a) Să se construiască o dreaptă d' a.i. $d' \subset \alpha, A \in d'$ și $d' \parallel d$.

b) Să se construiască o dreaptă prin A inclusă în α , care formează cu d un unghi de măsură dată a . Câte soluții există.

Soluții:



a) Dacă $A \in d$, atunci $d' = d$. Dacă $A \notin d$, ducem prin $A, d' \parallel d$.

b) Ducem $d_1 \subset \alpha, A \in d$, a.i. $m(\widehat{d_1 d'}) = a$ și $d_2 \subset \alpha, A \in d_2$ a.i. $m(\widehat{d_2 d'}) = a$, câte o dreaptă în fiecare semiplan determinat de d' . Deci (\exists) 2 soluții în afară de cazul $a = 0$ sau $a = 90$ când (\exists) o singură soluție.

14) Arătați că relația $\alpha \parallel \beta$ sau $\alpha = \beta$ definită pe mulțimea planelor este o relație de echivalență. Determinați clasele de echivalență.

Soluție:

$\alpha \parallel \beta$ sau $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha \sim \beta$

1) $\alpha = \alpha \Rightarrow \alpha \sim \alpha$, relația este reflexivă

2) $\alpha \sim \beta \Rightarrow \beta \sim \alpha$, relația este simetrică

$\alpha \parallel \beta$ sau $\alpha = \beta \Rightarrow \beta \parallel \alpha$ sau $\beta = \alpha \Rightarrow \beta \sim \alpha$

3) $\alpha \sim \beta \cap \beta \sim \gamma \Rightarrow \alpha \sim \gamma$

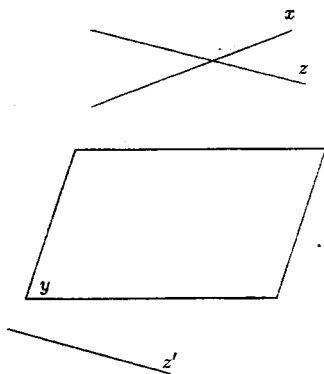
Dacă $\alpha = \beta \cap \gamma \sim \gamma \Rightarrow \alpha \sim \gamma$

Dacă $\alpha \neq \beta$ și $\alpha \sim \beta \Rightarrow \alpha \parallel \beta$
 $\beta \sim \gamma \Rightarrow \beta = \gamma$ sau $\beta \parallel \gamma$ } $\Rightarrow \alpha \parallel \gamma \Rightarrow \alpha \sim \gamma$

Clasa de echivalență determinată de planul α este construită din planele α' cu $\alpha' \sim \alpha$, adică din α și toate planele paralele cu α .

15) Se consideră pe mulțimea tuturor dreptelor și a planelor relația " $x \parallel y$ " sau $x = y$, unde x și y sînt drepte sau plane. Am definit o relație de echivalență?

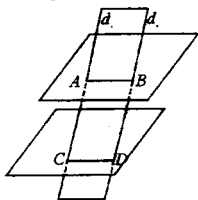
Soluție:



Nu, este o relație de echivalență, întrucît proprietatea de tranzitivitate nu este adevărată. De exemplu x o dreaptă, y un plan, z dreaptă. Din $x \parallel y$ și $y \parallel z \not\Rightarrow x \parallel z$, dreptele x și z putînd fi coplanare și concurente sau necoplanare.

16) Arătați că două segmente paralele cuprinse între plane paralele, sînt concurente.

Soluție:



$$d_1 \parallel d_2 \Rightarrow (\exists) \gamma = (d_1 d_2)$$

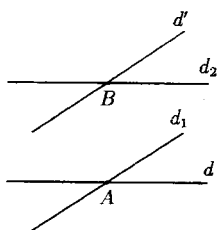
$$\left. \begin{array}{l} \alpha \cap \gamma = AB \\ \beta \cap \gamma = CD \\ \alpha \parallel \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} AB \parallel CD \\ AC \parallel BD \end{array} \Rightarrow ABCD \text{ paralelogram.}$$

$$\text{Deci } \parallel AC \parallel \parallel BD \parallel.$$

17) Să se arate că prin două drepte, care nu sînt conținute într-un același plan, se pot duce

plane paralele, în mod unic. Să se studieze și situația când cele două drepte sînt coplanare.

Soluție:

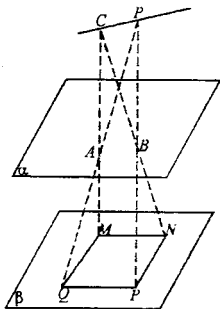


Luăm $A \in d$ și ducem prin el $d_1 \parallel d'$. Luăm $B \in d'$ și ducem $d_2 \parallel d$. Planul $(d_1 d_2) \parallel (dd_1)$, întrucît două drepte concurente din primul plan sînt paralele cu două drepte concurente din al doilea plan.

Cînd d și d' sînt coplanare, atunci cele patru drepte d, d_1, d_2 și d' sînt coplanare și cele două plane coincid cu planul dreptelor d și d' .

18) Fie α și β două plane paralele, $A, B \in \alpha$, iar CD o dreaptă paralelă cu α și β . Dreptele CA, CB, DB, DA taie planul β respectiv în M, N, P, Q . Să se arate că aceste puncte sînt vîrfurile unui paralelogram.

Soluție:



$$\left. \begin{array}{l} \text{Fie planul } (CDA) \\ CD \parallel \beta \end{array} \right\} \Rightarrow CD \parallel QM \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Fie planul } (CDB) \\ CD \parallel \beta \end{array} \right\} \Rightarrow CD \parallel PN \quad (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Fie planul } (CAB) \\ \alpha \parallel \beta \end{array} \right\} \Rightarrow AB \parallel MN \quad (3)$$

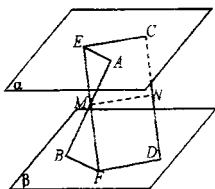
$$\left. \begin{array}{l} \text{Fie planul } (DAB) \\ \alpha \parallel \beta \end{array} \right\} \Rightarrow AB \parallel QP \quad (4)$$

Din (1), (2), (3), (4) $\Rightarrow MNPQ$ paralelogram.

19) Aflați locul geometric al mijloacelor segmentelor care au extremitățile în două plane paralele.

Soluție:

Fie $[AB]$ și $[CD]$ două segmente cu $A, C \in \alpha$ și $B, D \in \beta$ a.î. $|AM| = |MB|$ și $|CN| = |ND|$.



În planul (MCD) ducem prin M , $EF \parallel CD \Rightarrow EC \parallel DF \Rightarrow EFDC \Rightarrow$ paralelogram

$$\Rightarrow |EF| \equiv |CD|$$

Dreptele concurente AB și EF determină un plan care taie planele α după 2 drepte paralele $\Rightarrow EA \parallel BF$.

În acest plan $|AM| \equiv |BM|$

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{EMA} \equiv \widehat{BMF} \text{ (opuse la vîrf)} \\ \widehat{EAM} \equiv \widehat{FBM} \text{ (alterne intene)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AME \equiv \triangle BMF \Rightarrow |EM| \equiv |MF|$$

În paralelogramul $ECDF$, $|CN| \equiv |ND|$, $|EM| \equiv |MF| \Rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} MN \parallel EC \Rightarrow MN \parallel \alpha \\ MN \parallel FD \Rightarrow MN \parallel \beta \end{array} \right. \quad (1)$$

Deci segmentul ce unește mijloacele a două din segmentele cu extremitățile în α și β este paralel cu aceste plane. Mai luăm $[GH]$ cu $G \in \alpha$, $H \in \beta$ și $|GQ| \equiv |QH|$ și arătăm la fel că $OM \parallel \alpha$ și $OM \parallel \beta$. (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow M, N, Q$ aparțin unui plan paralel cu α și β notat cu γ .

Reciproc să arătăm că orice punct din acest plan este mijlocul unui segment cu extremitățile în α și β .

Fie seg. $[AB]$ cu $A \in \alpha$ și $B \in \beta$ și $|AM| = |BM|$. Prin M ducem planul paralel cu α și β și în acest plan luăm un punct arbitrar $O \in \gamma$.

Prin O ducem o dreaptă a.f. $d \cap \alpha = \{I\}$ și $d \cap \beta = \{I'\}$

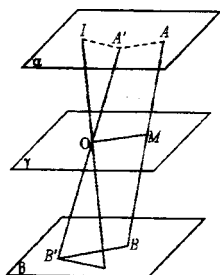
În planul (OAB) ducem $A'B' \parallel AB$. Planul $(AA'B'B)$ taie cele trei plane paralele după drepte paralele \Rightarrow

$$\left. \begin{array}{l} A'A \parallel OM \parallel B'B \\ B \in \beta \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\text{În planul } (A'B'I) \Rightarrow |A'O| \equiv |OB'| \Rightarrow IA' \parallel B'I \text{ și deci } \begin{array}{l} |A'O| \equiv |OB'| \\ \widehat{IOA'} \equiv \widehat{IOB'} \end{array} \text{ și } \widehat{IA'O} \equiv \widehat{IB'O}$$

$\Rightarrow \triangle IOA' \equiv \triangle IOB' \Rightarrow |OI| \equiv |OI| \Rightarrow O$ este mijlocul unui segment cu extremități în planele α și β .

Deci locul geometric este planul γ , paralel cu α și β și trecind pe la mijlocul distanței dintre α și β .

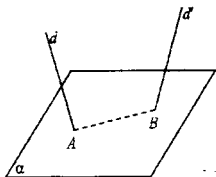


Probleme recapitulative (II)

1) Prin două drepte date să se ducă este un plan, a.i. dreapta lor de intersecție să fie conținută într-un plan dat.

Soluție:

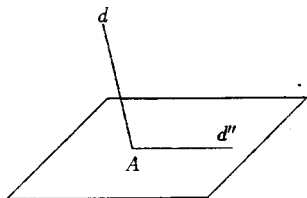
1. Presupunem că $d \cap \alpha \neq \emptyset$ și $d' \cap \alpha = \{B\}$.



Fie $d \cap \alpha = \{A\}$ și $d' \cap \alpha = \{B\}$ și planele determinate de perechi de drepte concurente (d, AB) ; (d', AB) .

Observăm că acestea sînt planele cerute, întrucît $d \subset (d, AB)$, $d' \subset (d', AB)$ și $(d, AB) \cap (d', AB) = AB \subset \alpha$.

2. Presupunem $d \cap \alpha = \{A\}$ și $d' \parallel \alpha$.

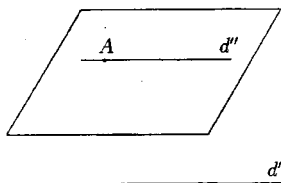


Ducem prin A , în planul α , dreapta $d'' \parallel d$ și considerăm planele (d, d'') și (d', d'') și observăm că $(d, d'') \cap (d', d'') = d'' \subset \alpha$

d'

3. Presupunem $d \cap \alpha = \emptyset$ și $d' \cap \alpha = \emptyset$ și $d' \in$ direcției d .

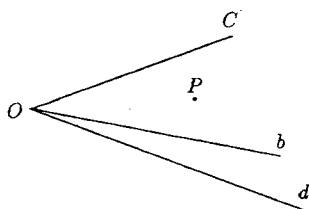
d



Fie $A \in \alpha$ și $d'' \parallel d \Rightarrow d'' \parallel d'$ și planele sunt (d, d'') și (d', d'') . Se judecă ca mai sus.

2) Fie a, b, c trei drepte cu un punct comun, iar P un punct nesituat pe ele. Să se arate că planele (Pa) , (Pb) , (Pc) conțin o dreaptă comună.

Soluție:



$$a \cap b \cap c = \{O\}$$

$$\left. \begin{array}{l} P \in (Pa) \\ O \in (Pa) \end{array} \right\} \Rightarrow OP \subset (Pa)$$

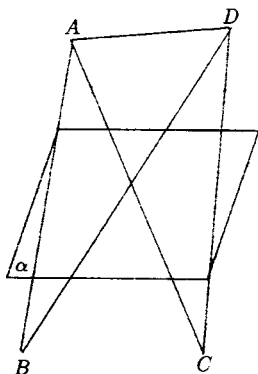
$$\left. \begin{array}{l} P \in (Pb) \\ O \in (Pb) \end{array} \right\} \Rightarrow OP \subset (Pb)$$

$$\left. \begin{array}{l} P \in (Pc) \\ O \in (Pc) \end{array} \right\} \Rightarrow OP \subset (Pc)$$

$$\Rightarrow (Pa) \cap (Pb) \cap (Pc) = OP$$

3) Fie A, B, C, D puncte, iar α un plan care separă punctele A și B ; A și C ; C și D . Arătați că $\alpha \cap |BD| \neq \emptyset$ și $\alpha \cap |AD| = \emptyset$.

Soluție:



Dacă α separă punctele A și B înseamnă că ele se găsesc în semispații diferite și fie $\sigma = |\alpha A$ și $\sigma' = |\alpha B$.

Întrucât α separă pe A și $C \Rightarrow C \in \sigma'$

Întrucât α separă pe C și $D \Rightarrow D \in \sigma$

Din $B \in \sigma'$ și $D \in \sigma \Rightarrow \alpha$ separă punctele B și $D \Rightarrow |BD| \cap \alpha \neq \emptyset$.

Din $A \in \sigma$ și $D \in \sigma \Rightarrow |AD| \cap \alpha = \emptyset$.

4) Pe muchiile a, b, c , ale unui unghi triedru de vîrf O se iau punctele A, B, C ; fie apoi $D \in |BC|$ și $E \in |AD|$. Arătați că $|OE| \subset \text{int.} \widehat{abc}$.

Soluție:

$$\left. \begin{array}{l} B \in (ab) \\ C \in (a, b), c \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{pr. 1, pag. 58}} [BC] \subset |(a, b), c| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |OE \subset |(bc), A \quad (2)$$

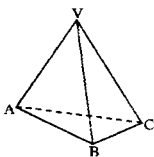
$$\left. \begin{array}{l} C \in (ac) \\ B \in |(ac), c \end{array} \right\} \Rightarrow [CB] \subset |(ac), B \Rightarrow \left. \begin{array}{l} D \in |(ac), B \\ A \in (a, c) \end{array} \right\} \Rightarrow [AD] \subset |(ac), B$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} E \in |(ac), B \\ O \in (a, c) \end{array} \right\} \Rightarrow [AD] \subset |(ac), B \Rightarrow \left. \begin{array}{l} E \in |(ac), B \\ O \in (ac) \end{array} \right\} \Rightarrow |OE \subset |(ac), B \quad (3)$$

Din (1), (2), (3) $\Rightarrow |OE \subset |(ab), c \cap |(bc), A \cap |(ac), B = \text{int. } \widehat{abc}$.

5) Arătați că următoarele mulțimi sînt convexe: interiorul unui unghi triedru, un tetraedru fără o muchie (fără o față).

Soluție:



a) $\text{int.}(|VA, |\widehat{VB}, |VC) = |(VAB), C \cap |(VBC), A \cap |(VAC), B$ deci este intersecție de mulțimi convexe, și deci interiorul unui triedru este mulțime convexă.

b) Tetraedru $[VABC]$ fără muchia $[AC]$. Notăm cu $M_1 = [ABC] - [AC] = [AB, C \cap [BC, A \cap [AC, B$ deci este mulțime convexă, fiind intersecție de mulțimi convexe.

$|(\{ABC\}, V \cap M_1$ este mulțime convexă.

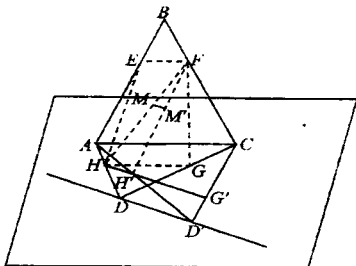
La fel $|(\{VAC\}, B \cup M_2$ este mulțime convexă, unde $M_2 = [VAC] - [AC]$. Dar $[VABC] - [AC] = |(VAB), C \cap |(VBC), A \cap |(\{ABC\}, V \cup M_1) \cap |(\{VAC\}, B \cup M_2)$ și deci este mulțime convexă ca intersecție de mulțimi convexe.

c) Tetraedru $[VABC]$ fără față $[ABC]$

$[VABC] - [ABC] = |(VAB), C \cap |(VBC), A \cap |(VAC), B \cap |(\{ABC\}, V$ deci intersecție de mulțimi convexe \Rightarrow este mulțime convexă.

6) Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare și E, F, G, H mijloacele segmentelor $[AB], [BC], [CD], [DA]$. Să se arate că $EF \parallel (ACD)$ și punctele E, F, G, H sînt coplanare.

Soluție:



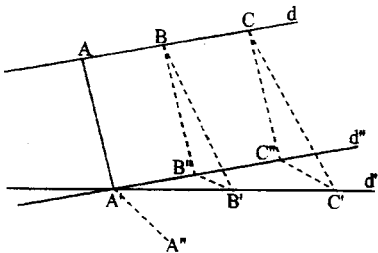
a) În pl. (BAC) avem $EF \parallel AC$. În pl. (DAC) avem $AC \subset (DAC) \Rightarrow EF \parallel (DAC)$. Tot în acest plan $HG \parallel AC$. Deci $EF \parallel HG \Rightarrow E, F, G, H$ sint coplanare și cum $\|EF\| = \frac{\|AC\|}{2} = \|HG\| \Rightarrow EFGH$ este paralelogram.

7) Pe dreptele d, d' se iau punctele distincte A, B, C respectiv A', B', C' . Să se arate că putem duce prin dreptele AA', BB', CC' trei plane paralele între ele dacă și numai dacă

$$\frac{\|AB\|}{\|A'B'\|} = \frac{\|BC\|}{\|B'C'\|}.$$

Soluție:

Presupunem că avem $\alpha \parallel \beta \parallel \gamma$ a.i. $AA' \subset \alpha, BB' \subset \beta, CC' \subset \gamma$.



Ducem prin A' o dreaptă paralelă cu d : $d'' \parallel d$. Cu, d intersectează toate cele 3 plane $A' \subset d''$ în $A, B, C \Rightarrow$ și d'' le taie în A', B'', C'' .

$$\left. \begin{array}{l} \text{Cum } \alpha \parallel \beta \parallel \gamma \\ d \parallel d'' \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \|AB\| = \|A'B''\| \\ \|BC\| = \|B''C''\| \end{array} \quad (1)$$

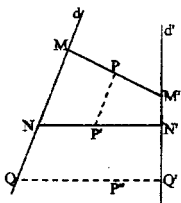
Fie planul (d', d'') . Cum acest plan are comun cu planele α, β, γ respectiv punctele A', B'', C'' și cum $\alpha \parallel \beta \parallel \gamma \Rightarrow$ el le intersectează după drepte paralele $\Rightarrow A'A'' \parallel B'B'' \parallel$

$$\|C'C''\| \xrightarrow{\text{Teles}} \frac{\|A'B''\|}{\|A'B'\|} = \frac{\|B''C''\|}{\|B'C'\|}. \quad (2)$$

Ținând cont de (1) și (2) $\Rightarrow \frac{\|AB\|}{\|A'B'\|} = \frac{\|BC\|}{\|B'C'\|}$. Reciprocă se arată similar.

8) Fie M, M' cîte un punct mobil pe dreptele necoplanare d, d' . Să se afle locul geometric al punctelor P care împarte segmentul $[MM']$ într-un raport dat.

Soluție:



Fie $P \in [MM']$ a.î. $\frac{\|MP\|}{\|PM'\|} = k$

și $P' \in [NN']$ a.î. $\frac{\|NP'\|}{\|P'N'\|} = k$

$$\text{Deci } \frac{\|MP\|}{\|PM'\|} = \frac{\|NP'\|}{\|P'N'\|} \Rightarrow \frac{\|MP\|}{\|NP'\|} = \frac{\|PM'\|}{\|P'N'\|}$$

\Rightarrow conform problemei 7 că se pot duce trei plane $\parallel \beta \parallel \alpha \parallel \gamma$

a.î. $MN \subset \beta, PP' \subset \alpha, M'N' \subset \gamma$.

$$\left. \begin{array}{l} \beta \parallel \alpha \\ MN \subset \beta \end{array} \right\} \Rightarrow MN \parallel \alpha \Rightarrow d \parallel \alpha$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \parallel \gamma \\ M'N' \subset \gamma \end{array} \right\} \Rightarrow M'N' \parallel \alpha \Rightarrow d' \parallel \alpha \text{ și } PP' \subset \alpha.$$

Deci fixînd P și lăsînd P' variabil $P' \in$ unui plan paralel cu cele două drepte și care trece prin P . Se știe că acest plan este unic, fiindcă ducînd prin P paralele la d și d' pentru a obține acest plan el este bine determinat de 2 drepte concurente.

Reciproc: Fie $P'' \in \alpha$ adică planului ce trece prin P și este paralel cu d și d' .

$\left. \begin{array}{l} (P'', d) \text{ det. un plan} \\ (P'', d') \text{ det. un plan} \end{array} \right\} \text{cele două plane avînd un punct comun se intersectează după o}$
 dreaptă $(P'', d) \cap (P'', d') = QQ'$ unde $Q \in d$ și $Q' \in d'$.

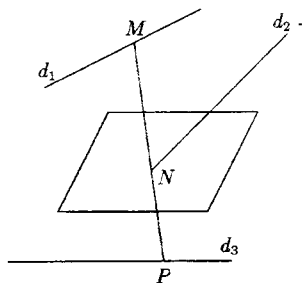
Cum $d \parallel \alpha \Rightarrow MQ \parallel \alpha \Rightarrow (\exists) \beta$ a.i. $MQ \subset \beta$, $\beta \parallel \alpha$.

Cum $d' \parallel \alpha \Rightarrow M'Q' \parallel \alpha \Rightarrow (\exists) \gamma$ a.i. $M'Q' \subset \gamma$, $\gamma \parallel \alpha$.

Deci locul geometric căutat este un plan paralel cu d și d' .

9) Să se construiască o dreaptă care să întâlnească trei drepte date respectiv în M, N, P și pentru care $\frac{\|MN\|}{\|NP\|}$ să fie raport dat.

Soluție:



Considerăm planul care conform problemei 8 reprezintă locul geometric al punctelor care împart segmentele cu extremitățile pe dreptele d_1 și d_3 într-un raport dat k . Pentru obținerea acestui plan se ia un punct $A \in d_1$, $B \in d_3$ și punctul $C \in AB$ a.i. $\frac{\|AC\|}{\|CB\|} = k$. Prin acest punct C se duc două paralele la d_1 și d_3 care determină planul menționat α .

Fie $d_2 \cap \alpha = \{N\}$. Trebuie determinat un segment care să treacă prin N și să aibe extremitățile pe d_1 și d_3 respectiv în M și P . Întrucît dreapta căutată trece prin N și M

$$\left. \begin{array}{l} N \in (N, d_1) \\ M \in (N, d_1) \end{array} \right\} \Rightarrow MN \subset (Nd_1) \quad (1)$$

$$\text{Aceași dreaptă trebuie să treacă prin } N \text{ și } P \text{ și cum } \left. \begin{array}{l} N \in (N, d_1) \\ P \in (N, d_3) \end{array} \right\} \Rightarrow NP \subset (Nd_3) \quad (2)$$

M, N, P coliniare.

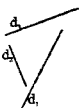
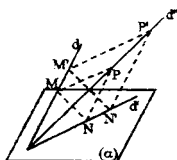
Din (1) și (2) $\Rightarrow MP \subset (N, d) \cap (N, d_3) \Rightarrow MP = (Nd_1) \cap (d_2N)$

Atunci conform problemei 8: $\frac{\|MN\|}{\|NP\|} = k$ și dreapta căutată este MP .

10) Să se afle locul geometric al vîrfului P al triunghiului M, N, P dacă laturile acestuia rămîn paralele cu trei drepte fixe, vîrfurile M descrie o dreaptă dată d , iar vîrfurile $N \in$ unui plan

dat α .

Soluție:



Fie $\triangle MNP$ a.i. $MP \parallel d_1$, $MN \parallel d_2$, $PN \parallel d_3$. $M \in d$, $N \in \alpha$

Fie $\triangle M'P'N'$ a.i. $M' \in d$, $N' \in \alpha$, $M'P' \parallel d_1$; $M'N' \parallel d_2$;

$P'N' \parallel d_3$.

Dreapta MP generează un plan β , fiind paralelă cu o direcție d_1 și sprijinindu-se pe o dreaptă dată d .

La fel, dreapta MN generează un plan γ deplăsindu-se paralel cu o direcție d_2 fixă și sprijinindu-se pe o dreaptă dată d . Cum γ conține pe $d \Rightarrow O$ este punct comun pentru α și $\gamma \Rightarrow \alpha \cap \gamma \neq \emptyset \Rightarrow \alpha \cap \gamma = d'$, $O \in d'$.

$$\left. \begin{array}{l} N \in \alpha \\ N \in \gamma \end{array} \right\} \Rightarrow N \in \alpha \cap \gamma \ (\forall) \triangle \text{ considerat, deci } N \text{ descrie tot o dreaptă } d' \subset \alpha.$$

Cum planul γ este bine determinat de dreapta d și direcția d_2 , este fix, deci $d' = \alpha \cap \gamma$ este fixă.

La fel, PN va genera un plan δ , deplăsindu-se paralel cu direcția fixă d_3 și sprijinindu-se pe dreapta fixă d' .

$$\left. \begin{array}{l} \text{Cum } O \in d' \\ O \in d \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} O \in \delta \\ O \in \beta \end{array} \right. \Rightarrow \beta \cap \delta \neq \emptyset \Rightarrow O \in \beta \cap \delta = d''$$

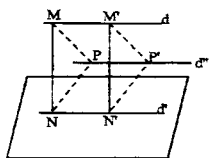
$$\left. \begin{array}{l} P \in MP \Rightarrow P \in \beta \\ P \in PN \Rightarrow P \in \delta \end{array} \right\} \Rightarrow P \in \beta \cap \delta \ (\forall) P \text{ virf variabil, } P \in d''.$$

Deci pentru orice $\triangle MNP$ în condițiile date, virful $P \in d''$.

Reciproc, fie $P' \in d''$. În planul (d', d'') ducem $P', M' \parallel PM \Rightarrow (M'P'N') \parallel (PMN) \Rightarrow (dd')$ intersecția a două plane paralele după drepte paralele $\Rightarrow M'N' \parallel MN$ și $\triangle M'P'N'$ astfel construit are laturile paralele cu cele trei drepte fixe are $M' \in d$ și $N' \in \alpha$, deci este unul din triunghiurile date în text.

Deci locul geometric este dreapta d'' a cărei construcție am văzut cum să realizează și care trece prin O .

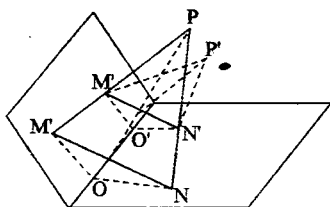
În cazul $D \parallel \alpha$ obținem



$$\left. \begin{array}{l} d \subset \beta \\ \delta' \subset \delta \\ d \parallel d' \end{array} \right\} \Rightarrow \beta \cap \delta = d'' \text{ și } d'' \parallel d$$

În acest caz locul geometric este o dreaptă paralelă cu d .

b)



Fie MNP și Fie $M'N'P'$ a.i.

$$\left. \begin{array}{lll} MP \parallel d_1 & M'P' \parallel d_1 & MP \parallel M'P' \\ MN \parallel d_2 & M'N' \parallel d_2 & \Rightarrow MN \parallel M'N' \\ NP \parallel d_3 & N'P' \parallel d_3 & NP \parallel N'P' \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle MNP \sim \triangle M'N'P' \Rightarrow$$

$$M \in \beta, N \in \alpha \quad M' \in \beta, N' \in \alpha$$

$$\Rightarrow (MNP) \parallel (M'N'P').$$

Presupunem $\alpha \cap \beta = d$ și fie $d \cap (MNP) = \{O\}$ și $d \cap (M'N'P') = \{O'\} \Rightarrow$

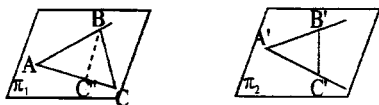
$$\left. \begin{array}{l} (MNP) \cap \beta = MO \\ (M'N'P') \cap \beta = M'O' \end{array} \right\} \Rightarrow MO \parallel M'O' \text{ un plan taie planele paralele după drepte paralele.}$$

La fel $ON \parallel O'N'$ și cum $MN \parallel M'N' \Rightarrow \triangle OMN \sim \triangle O'M'N'$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{\|OM\|}{\|O'M'\|} = \frac{\|ON\|}{\|O'N'\|} = \frac{\|MN\|}{\|M'N'\|} \\ \widehat{OMN} = \widehat{O'M'N'} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle MNP \sim \triangle M'N'P' \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{\|MP\|}{\|M'P'\|} = \frac{\|MN\|}{\|M'N'\|} \\ \widehat{MNP} = \widehat{M'N'P'} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle OMP \sim \triangle O'M'P' \quad (1) \Rightarrow \begin{aligned} \widehat{MOP} &\equiv \widehat{M'O'P'} \\ \widehat{MPO} &\equiv \widehat{M'P'O'} \end{aligned}$$

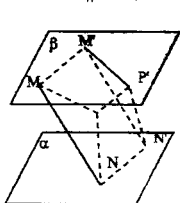
Folosim proprietatea: Fie π_1 și π_2 2 plane paralele și $A, B, C \in \pi_1$ și $A', B', C' \in \pi_2$ $AB \parallel A'B', AC \parallel A'C', \widehat{A'BC'} \equiv \widehat{A'B'C'}$, $\|AB\| = \|A'B'\|$, $\|AC\| = \|A'C'\|$.



Să arătăm că $BC \parallel B'C'$. Într-adevăr $(BB'C')$ este un plan care intersectează cele 2 plane după drepte paralele.

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} B'C' &\parallel BC'' \\ AB &\parallel A'B' \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \widehat{ABC''} &\equiv \widehat{A'B'C'} \\ \text{dar } \widehat{ABC} &\equiv \widehat{A'B'C'} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{ABC} \equiv \widehat{ABC''} \Rightarrow |BC| = |BC''| \Rightarrow B'C' \parallel BC.$$

Aplicind în (1) această proprietate $\Rightarrow OP \parallel O'P'$. Păstrind OP fix și lăsând P' variabil mereu $O'P' \parallel OP$, deci $O'P'$ generează un plan ce trece prin d . Presupunem $\beta \parallel \alpha$.



$$\left. \begin{aligned} \alpha &\parallel \beta \\ MN &\parallel M'N' \end{aligned} \right\} \Rightarrow |MN| \equiv |M'N'|$$

$$\Rightarrow MNN'M' \text{ paralelogram}$$

$$\Rightarrow MM' \parallel NN'$$

$$\Rightarrow MM' \parallel (NN'P'P)$$

$$\Rightarrow (\overline{MPP'M'}) \cap (\overline{MN'P'P}) = PP'$$

$$\text{și } PP' \parallel MM' \Rightarrow PP' \parallel NN'$$

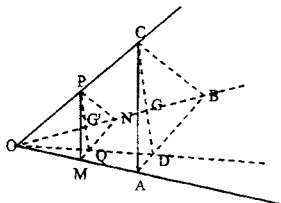
Considerind P' fix și P variabil $\Rightarrow PP' \parallel \alpha$ și mulțimea paralelelor duse $PP' \parallel \beta$ la un plan printr-un punct exterior este un plan paralel cu cel dat.

Deci locul geometric este un plan paralel cu α și β .

11) Pe muchiile $[OA]$, $[OB]$, $[OC]$ ale unui unghi triedru se consideră respectiv punctele M , N , P a.i. $\|OM\| = \lambda\|OA\|$, $\|ON\| = \lambda\|OB\|$, $\|OP\| = \lambda\|OC\|$, unde λ este un număr pozitiv variabil. Să se arate locul geometric al centrului de greutate al triunghiului MNP .

Soluție:

$$\|OM\| = \lambda \|OA\| \Rightarrow \frac{\|OM\|}{\|OA\|} = \lambda; \|ON\| = \lambda \|OB\| \Rightarrow \frac{\|ON\|}{\|OB\|} = \lambda;$$



$$\|OP\| = \lambda \|OC\|, \Rightarrow \frac{\|OP\|}{\|OC\|} = \lambda$$

În planul DAC avem:

$$\frac{\|OM\|}{\|OA\|} = \frac{\|OP\|}{\|OC\|} \Rightarrow PM \parallel AC.$$

În planul DAB avem:

$$\frac{\|OM\|}{\|OA\|} = \frac{\|ON\|}{\|OB\|} \Rightarrow MN \parallel AB.$$

În planul OBC avem:

$$\frac{\|ON\|}{\|OB\|} = \frac{\|OP\|}{\|OC\|} \Rightarrow PN \parallel BC.$$

Din $PM \parallel AC$ și $PN \parallel BC \Rightarrow (MNR) \parallel (ABC)$

Fie Q și D respectiv mijloacele laturilor $|MN|$ și $|AB|$

$$\left. \begin{aligned} \triangle OMN \sim OAB \Rightarrow \frac{\|OM\|}{\|OA\|} &= \frac{\|MN\|}{\|AB\|} = \frac{\frac{1}{2}\|MN\|}{\frac{1}{2}\|AB\|} = \frac{\|MQ\|}{\|AB\|} \\ \widehat{OMQ} &= \widehat{OAB} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle OMQ \sim OAD \Rightarrow$$

$\Rightarrow \widehat{MOQ} = \widehat{AOD} \Rightarrow O, Q, D$ sunt colineare.

Dreptele concurente OD și OC determină un plan care taie planele paralele \Rightarrow

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} PQ \parallel CD \\ \text{în } (OCD) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle OPQ \sim \triangle OCD \Rightarrow \frac{\|OP\|}{\|OC\|} = \frac{\|PQ\|}{\|CD\|} = \frac{\frac{2}{3}\|PQ\|}{\frac{2}{3}\|CD\|} = \frac{\|PG'\|}{\|CB\|} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \widehat{OPG'} \equiv \widehat{OCQ} \Rightarrow \triangle OPG' \sim \triangle OCQ \Rightarrow \widehat{POG'} \equiv \widehat{COG} \Rightarrow O, G', G$ sînt colineare deci

$G' \in |OG| \Rightarrow$ locul geometric căutat este semidreapta $|OG$.

Reciproc: luăm un punct pe $|OG$, G'' ducem prin el un plan paralel cu (ABC) , planul (M'', N'', P'') , se formează triunghiuri asemenea și apar rapoartele din ipoteză.

12) $ABCD$ și $A_1B_1C_1D_1$ fiind două paralelograme oarecare în spațiu se iau punctele A_2, B_2, C_2, D_2 care împart segmentele $[AA_1], [BB_1], [CC_1], [DD_1]$ în același raport. Să se arate că A_2, B_2, C_2, D_2 este un paralelogram.

Soluție:

$$\text{Fie } A_2, B_2, C_2, D_2 \text{ a.î. } \frac{\|AA_2\|}{\|A_2A_1\|} = \frac{\|BB_2\|}{\|B_2B_1\|} = \frac{\|CC_2\|}{\|C_2C_1\|} = \frac{\|DD_2\|}{\|D_2D_1\|} = k.$$

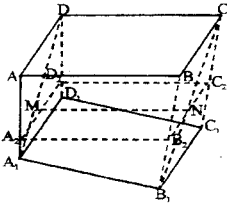
Luăm pe dreptele AD_1 și BC_1 punctele M și N a.î. $M \in |AD_1|, \frac{\|AM\|}{\|MD_1\|} = k$ și

$$N \in |BC_1|, \frac{\|BN\|}{\|NC_1\|} = k$$

$$\text{Din } \frac{\|AA_2\|}{\|A_2A_1\|} = \frac{\|AM\|}{\|MD_1\|} = k \xrightarrow{T.Tajles} A_2M \parallel A_1D_1 \quad (1)$$

$$A_2M \parallel A_1D_1 \Rightarrow \triangle AA_2M \sim \triangle AA_1D_1 \Rightarrow \frac{\|AA_2\|}{\|AA_1\|} = \frac{\|A_2M\|}{\|A_1D_1\|}$$

Urmează



$$\frac{\|A_1M_1\|}{\|A_2D_1\|} = \frac{k}{k+1} \Rightarrow \|A_2M\| = \frac{k}{k+1} \|A_1D_1\| \quad (2)$$

$$\text{La fel } \frac{\|BB_2\|}{\|B_2B_1\|} = \frac{\|BN\|}{\|NC_1\|} = k \Rightarrow B_2N \parallel B_1C_1 \quad (3)$$

$$B_2N \parallel B_1C_1 \Rightarrow \triangle BB_1N \sim \triangle BB_1C,$$

$$\Rightarrow \frac{\|BB_2\|}{\|BB_1\|} = \frac{\|B_2N\|}{\|B_1C_1\|}. \text{ Cum } \frac{\|BB_2\|}{\|BB_1\|} = \frac{\|AA_2\|}{\|AA_1\|} = \frac{k}{k+1}.$$

$$\text{obținem } \frac{\|B_2N\|}{\|B_1C_1\|} = \frac{k}{k+1} \Rightarrow \|B_2N\| = \frac{k}{k+1} \|B_1C_1\| \quad (4)$$

$$\text{Din } A_1D_1 \parallel B_1C_1 \Rightarrow \|A_1D_1\| \parallel \|B_1C_1\|$$

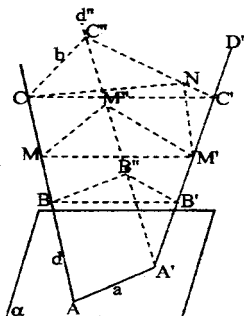
$$(1), (2), (3), (4) \Rightarrow A_2M \parallel B_2N \text{ și } \|A_2M\| = \|B_2N\| \Rightarrow A_2D_2NM \text{ este paralelogram.}$$

$$\Rightarrow A_2B_2 \parallel MN, \|A_2B_2\| \parallel \|MN\| \Rightarrow D_2C_2NM \text{ paralelogram.}$$

$$\Rightarrow D_2C_2 \parallel MN, \|D_2C_2\| \parallel \|MN\| \text{ deci } A_2B_2 \parallel D_2C_2 \text{ și } \|A_2D_2\| \parallel \|D_2C_2\| \Rightarrow A_2B_2C_2D_2 \text{ paralelogram.}$$

13) Se dau dreptele d, d' care taie un plan dat α în A și A' . Să se construiască punctele M, M' situate respectiv pe d, d' a.i. $MM' \parallel \alpha$ și segmentul $[MM']$ să aibe o lungime dată l .
Discuție.

Soluție:



Ducem prin A' o dreaptă $d'' \parallel d$. Ducem două plane paralele cu α , care vor intersecta cele trei drepte respectiv în B' , B^* , B și C' , C^* , C . Planul (d, d^*) intersectează planele α , $(BB'B^*)$, $(CC'C^*)$ după drepte paralele $\left. \begin{array}{l} AA' \parallel BB^* \parallel CC^* \\ d \parallel d^* \end{array} \right\} \Rightarrow \|AA'\| = a = \|BB^*\| = \|CC^*\|$. Planul (d', d^*) intersectează planele paralele $(BB'B^*)$, $(CC'C^*)$ după drepte paralele $\Rightarrow B'B^* \parallel C'C^*$, $BB^* \parallel CC^* \Rightarrow \widehat{BB'B^*} \equiv \widehat{CC'C^*}$.

Deci (V) plan paralel cu α pe care îl construim, triunghiul obținut are o latură construită de lungime a și unghiul corespunzător lui $\widehat{BB'B'}$ constant. Notăm cu o linie aceea poziție a plan pentru care lățimea opusă unghiului căutat este l . Cu vârful compasului în C și o deschidere egală cu l , trasăm un arc de cerc care taie segmentul $|C'C'|$ în N sau dr. C^*C' . Prin N ducem în (d^*d') o paralelă la d^* care întâlnește precis de d' într-un punct M' . Prin M' ducem planul \parallel la α care va intersecta cele trei drepte în M, M', M^* .

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} NM' \parallel C^*M^* \\ C^*N \parallel M^*M' \end{array} \right\} \Rightarrow M^*M'NC^* \text{ parallelogram}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \|NM'\| = \|C^*M^*\| \\ NM' \parallel C^*M \\ CM \parallel C^*M^* \\ \|CM\| = \|C^*M^*\| \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}} \right\} NM' \parallel CM, \|NM'\| = \|CM\| \Rightarrow CNM'M \text{ paralelogram}$$

$\Rightarrow \|MN'\| = \|CN\| = l$ iar dreapta MM' aflându-se, într-un plan paralel cu α este paralelă cu α .

Discuție:

Presupunind planul $(CC'C^*)$ variabil, cum $\|CC^*\|$ și $\widehat{CC^*C'}$ sînt constante atunci și $d(C, C^*C') = b = \text{constant}$

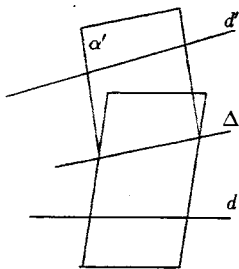
Dacă $l < d$ nu avem soluții

Dacă $l = d$ (\exists) o soluție, cercul de raza l , tangent la C^*C'

Dacă $l > d$ (\exists) două soluții: cercul de raza l , taie C^*C' în două puncte N și P .

14) Să se construiască o dreaptă care să treacă printr-un punct dat A și să fie perpendiculară pe două drepte date d și d' .

Soluție:



Ducem prin A planele $\alpha \perp d$ și $\alpha' \perp d'$

Cum A este punct comun $\Rightarrow \alpha \cap \alpha' \neq \emptyset \Rightarrow \alpha \cap \alpha' =$

$\Delta \Rightarrow A \in \Delta$.

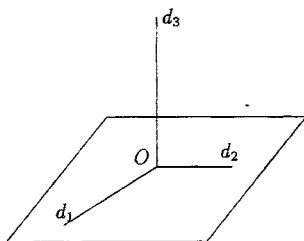
$\left. \begin{array}{l} d \perp \alpha \Rightarrow d \perp \Delta \\ d' \perp \alpha' \Rightarrow d' \perp \Delta \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta \text{ dreapta căutată}$

Dacă $\alpha \neq \alpha'$ soluția este unică.

Dacă $\alpha = \alpha'$ (\forall) dreaptă din α ce trece prin A corespunde problemei deci (\exists) o infinitate de soluții.

15) Să se arate că există trei drepte cu un punct comun, perpendiculare două este două.

Soluție:



Fie $d_1 \perp d_2$, două drepte concurente și perpendiculare $d_1 \cap d_2 = \{O\}$.

Ele determină un plan $\alpha = (d_1, d_2)$ și $O \in \alpha$. Construim perpendiculara pe α în O .

$d_3 \perp \alpha$, $O \in d_3 \rightarrow d_3 \perp d_1$, $d_3 \perp d_2$.

16) Fie a, b, c, d patru drepte cu un punct comun, d fiind perpendiculară pe a, b, c . Să se arate că dreptele a, b, c sînt coplanare.

Soluție:

Folosim metoda reducerii la absurd.

Fie $d \perp a$, $d \perp b$, $d \perp c$. Presupunem că aceste drepte nu sunt coplanare. Fie $\alpha = (b, c)$, $\alpha' = (a, b)$, $\alpha \neq \alpha'$. Rezultă $d \perp \alpha$, $d \perp \alpha'$.

Deci prin punctul O se pot duce 2 plane perpendiculare pe d . Fals $\Rightarrow a, b, c$ sunt coplanare.

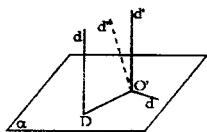
17) Arătați că nu există 4 drepte cu un punct comun, perpendiculare două câte două.

Soluție:(reducere la absurd)

Fie $a \cap b \cap c \cap d = \{O\}$ și perpendiculare două câte două. Din $d \perp a$; $d \perp b$; $d \perp c \Rightarrow a, b, c$ sînt coplanare și $b \perp a$, $c \perp a$ deci în punctul O se pot duce pe d două perpendiculare distincte. Fals. Deci cele 4 drepte nu pot fi perpendiculare 2 câte 2.

18) Fie $d \perp \alpha$ și $d' \parallel d$. Arătați că $d' \perp \alpha$.

Soluție:(reducere la absurd)



Presupunem că $d \not\perp \alpha$.

În $d' \cap \alpha = \{O\}$ ducem dreapta $d'' \perp \alpha$. Dreptele d' și d'' fiind concurente determină un plan $\beta = (d', d'')$ și cum $O' \in \beta$, $O' \in \alpha \Rightarrow$

$$\alpha \cap \beta = a \Rightarrow \begin{cases} a \subset \alpha \\ a \subset \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d'' \perp \alpha \Rightarrow d'' \perp a & (1) \\ d \perp \alpha \Rightarrow d \perp a & (2) \\ d' \parallel d \Rightarrow d' \perp a & (2) \end{cases}$$

Din (1) și (2) \Rightarrow că în planul β pe dreapta a în punctul O' s-au dus două perpendiculare distincte. Fals. Deci $d' \parallel \alpha$,

19) Să se arate că două drepte distincte perpendiculare pe un plan α sunt paralele.

Soluție:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Fie } d \perp \alpha \\ d' \perp \alpha \\ d \neq d' \end{array} \right\} \Rightarrow d \parallel d'$$

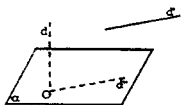
Reducere la absurd. Fie $d \not\parallel d'$. Ducem $d'' \parallel d$ prin O' .

$$\left. \begin{array}{l} d'' \parallel d \\ d \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} d'' \perp \alpha \\ d' \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \text{în punctul } O' \text{ se pot duce două perpendiculare pe planul } \alpha. \text{ Fals.}$$

Deci $d \parallel d'$.

20) Fie $d \perp \alpha$ și $d' \parallel \alpha$. Arătați că $d' \perp d$.

Soluție:

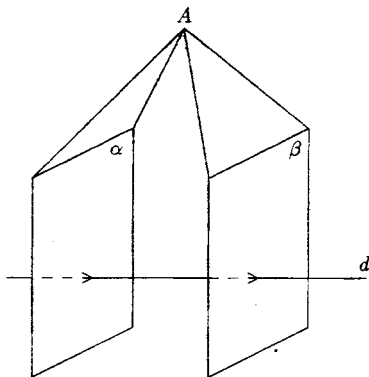


Fie $d \perp \alpha$ și $d' \cap \alpha = \{O\}$. Ducem prin O o paralelă la d' , care va fi conținută în α , atunci $d' \parallel \alpha$.

$$d'' \parallel d', O \in d'' \Rightarrow d'' \subset \alpha, d \perp \alpha \Rightarrow d \perp d'' \Rightarrow d \perp d'.$$

21) Arătați că două plane perpendiculare pe aceeași dreaptă sînt paralele între ele.

Soluție:

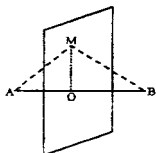


Presupunem $\alpha \nparallel \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta \neq \emptyset$ și fie $A \in \alpha \cap \beta \Rightarrow$ printr-un punct A se pot duce două plane distincte perpendiculare pe această dreaptă. Fals.

$d \Rightarrow \alpha \parallel \beta$.

22) Să se arate că locul geometric al punctelor egal depărtate de două puncte distincte A și B este un plan perpendicular pe AB , care trece prin mijlocul O al segmentului $[AB]$ (numit plan mediator al lui $[AB]$).

Soluție:



Fie M un punct din spațiu cu proprietatea $\|MA\| = \|MB\|$.

Unim M cu mijlocul segmentului $[AB]$ punctul O .

$\Rightarrow \triangle AMO = \triangle BMO \Rightarrow MO \perp AB$. Deci M se află pe o dreaptă dusă prin O , perpendiculara pe AB .

Dar reuniunea tuturor perpendicularelor duse prin O pe AB este planul perpendicular pe AB în punctul O , notat cu α , deci $M \in \alpha$.

Reciproc: fie $M \in \alpha$

$d = AB \perp \alpha \Rightarrow d \perp MO$

$|AO| \equiv |OM|$

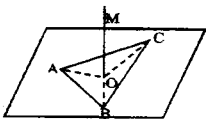
$|MO|$ latură comună

$MO \perp AB$

$\left. \begin{array}{l} |AO| \equiv |OM| \\ |MO| \text{ latură comună} \\ MO \perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AMO \equiv \triangle BMO \Rightarrow \|MA\| = \|MB\|$.

23) Să se afle locul geometric al punctelor din spațiu egal depărtate de vîrfurile unui triunghi ABC .

Soluție:



Fie M un punct din spațiu cu această proprietate

$$\|MA\| = \|MB\| = \|MC\|$$

Fie O centrul cercului circumscris $\triangle ABC \Rightarrow \|OA\| = \|OB\| = \|OC\|$, deci O este și el un punct al locului geometric căutat.

Conform problemei precedente locul geometric al punctelor din spațiu egal

depărtate de A și B se află în planul mediator al segmentului $[AB]$ care conține și pe M . Notăm cu α acest plan. Locul geometric al punctelor din spațiu egal depărtate de B și de C se află în planul mediator al segmentului $[BC]$, notăm β , care conține și pe O și pe M .

Deci $\alpha \cap \beta = OM$.

$$\left. \begin{array}{l} AB \perp \alpha \Rightarrow AB \perp OM \\ BC \perp \alpha \Rightarrow BC \perp OM \end{array} \right\} \Rightarrow OM \perp (ABC)$$

deci $M \in$ perpendicularei pe planul (ABC) în centrul cercului circumscris $\triangle ABC$.

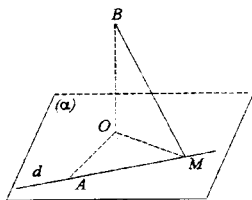
Reciproc, fie $M \in$ acestei perpendiculare

$$\left. \begin{array}{l} OM \perp OA \\ OM \perp OB \\ OM \perp OC \\ \|OA\| = \|OB\| = \|OC\| \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OMA \equiv \triangle OMB \equiv \triangle OMC \Rightarrow \|AM\| = \|BM\| =$$

$\|CM\|$, deci M are proprietate din enunț.

23) Se dau planul α și punctele $A \in \alpha$, $B \notin \alpha$. O dreaptă variabilă d trece prin A și este conținută în planul α . Să se afle locul geometric al picioarelor \perp din B pe d .

Soluție:



Ducem \perp din B pe plan. Fie O piciorul acestei perpendiculare.

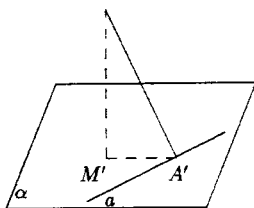
$$\left. \begin{array}{l} \text{Fie } BM \perp d \\ BO \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow MO \perp d \Rightarrow$$

$\Rightarrow m(\widehat{OMA}) = 90^\circ \Rightarrow M \in \text{cercului de diametrul } OA$. Reciproc, fie $M \in \text{acestui cerc} \Rightarrow OM \perp AM$, $BO \perp \alpha \Rightarrow BM \perp AM \Rightarrow BM \perp d$, deci M reprezintă piciorul din B pe AM .

24) Se dau: dreapta a , punctul $A \notin a$. Se cere locul geometric al picioarelor perpendicularelor din A pe planele care trec prin a .

Soluție:

Fie α un plan care trece prin a și fie M piciorul \perp din A pe $\alpha \Rightarrow AM \perp \alpha$.



$$\left. \begin{array}{l} \text{Din } AM \perp \alpha \\ AA' \perp a \end{array} \right\} \Rightarrow MA' \perp a, \text{ deci } M \in \text{unei perpendic-}$$

ular pe a în A' , deci aparține planului perpendicular pe a în A' , pe care-l notăm cu π și care-l conține și pe A .

$AM \perp \alpha \Rightarrow AM \perp MA' \Rightarrow M \in \text{cercului de diametru } AA' \text{ din planul } \pi$.

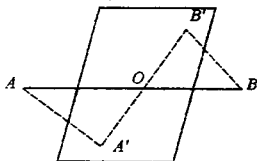
* Reciproc, fie M un punct de pe acest cerc de diametru AA' din planul π .

$$\left. \begin{array}{l} MA' \perp a \\ AA' \perp a \\ AM \perp MA' \end{array} \right\} \Rightarrow AM \perp (M, a) \Rightarrow M \text{ este piciorul unei } \perp \text{ duse din } A \text{ pe un plan ce trece prin } a.$$

25) Se consideră un plan α care trece prin mijlocul unui segment $[AB]$. Să se arate că

punctele A și B sînt egal depărtate de planul α .

Soluție:



Fie A' și B' picioarele perpendicularelor din A și B pe α

$$\left. \begin{array}{l} AA' \perp \alpha \\ BB' \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow AA' \parallel BB' \Rightarrow$$

$\Rightarrow (\exists)$ un plan $\beta = (AA', BB')$ și $AB \subset \beta \Rightarrow$

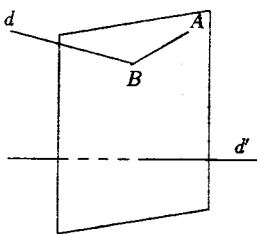
$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} O \in \beta \\ O \in \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow O \in \alpha \cap \beta = A'B' \Rightarrow O, A', B' \text{ sînt coliniare.}$$

În planul β avem

$$\left. \begin{array}{l} \|OA\| = \|OB\| \\ \widehat{AOA'} \equiv \widehat{BOB'} \\ \triangle \text{ dreptunghic} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AOA' \equiv \triangle BOB' \Rightarrow \|AA'\| = \|BB'\|$$

26) Printr-un punct dat să se ducă o dreaptă care să intersecteze o dreaptă dată și să fie \perp pe o altă dreaptă dată.

Soluție:



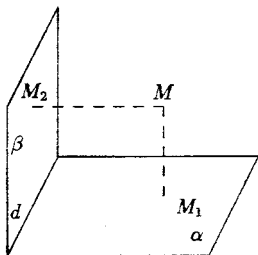
Fie d, d' dreptele date, A punctul dat. Ducem prin A planul $\alpha \perp$ pe d' .

Dacă $\alpha \cap d = \{B\}$, atunci dreapta AB este cea căutată căci trece prin A , întâlnește pe d și din $d' \perp \alpha \Rightarrow d' \perp AB$. Dacă $d \cap \alpha = \emptyset$ nu sînt soluții.

Dacă $d \subset \alpha$, atunci orice dreaptă determinată de A și un punct al lui d reprezintă soluție a problemei, deci o infinitate de soluții.

27) Fie α și β două plane distincte, a căror intersecție este dreapta d și fie M un punct nesituat în $\alpha \cup \beta$. Se duc dreptele MM_1 și $MM_2 \perp$ respectiv pe α și β . Să se arate că dreapta d este \perp pe (MM_1M_2) .

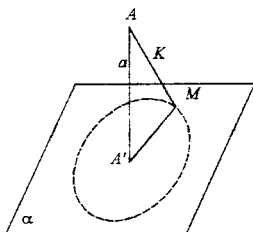
Soluție :



$$\begin{aligned} \alpha \cap \beta = d &\Rightarrow \begin{aligned} d &\subset \alpha \\ d &\subset \beta \end{aligned} \\ \left. \begin{aligned} MM_1 &\perp \alpha \Rightarrow MM_1 \perp d \\ MM_2 &\perp \beta \Rightarrow MM_2 \perp d \end{aligned} \right\} &\Rightarrow d \perp (MM_1M_2) \end{aligned}$$

28) Se dau un plan α și un punct A , $A \notin \alpha$. Să se afie locul geometric al punctelor $M \in \alpha$ astfel că segmentul $|AM|$ să aibă a lungime dată.

Soluție:



Fie M un punct a.î. $\|AM\| = k$.

Ducem $AA' \perp \alpha \Rightarrow A'$ punct fix și $AA' \perp A'M$

Notăm $\|AA'\| = a$.

$$\text{Atunci} \quad \left\{ \begin{aligned} \|AM\| &= \sqrt{k^2 - a^2} = ct \\ A^2 &- \text{fix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$M \in$ unui cerc cu centrul în A' și de rază $\sqrt{k^2 - a^2}$, pentru $k > a$.

Pentru $k = a$ obținem 1 punct.

Pentru $k < a$ mulțime vidă.

$$\begin{aligned} \text{Reciproc, fie } M \text{ un punct pe acest cerc} &\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \|A'M\| &= \sqrt{k^2 - a^2} \\ \|AA'\| &= a \end{aligned} \right\} \Rightarrow \|AM\| = \\ &= \sqrt{k^2 - a^2 + a^2} = k \text{ deci } M \text{ are proprietatea din enunț.} \end{aligned}$$

29) Fie O, A, B, C patru puncte a.î. $OA \perp OB \perp OC \perp DA$ și se notează $a = \|OA\|$, $b = \|OB\|$, $c = \|OC\|$.

- 1) Să se calculeze lungimile laturilor $\triangle ABC$ în funcție de a, b, c .
- 2) Să se calculeze $\sigma[ABC]$ și să se demonstreze relația $\sigma[ABC]^2 = \sigma[DAB]^2 + \sigma[OBC]^2 + \sigma[OCA]^2$.
- 3) Să se arate că proiecția ortogonală a punctului O pe planul (ABC) este ortocentrul

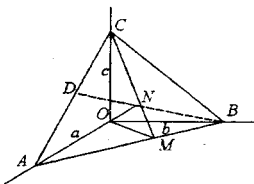
H al $\triangle ABC$.

4) Să se calculeze distanța $\|OH\|$.

Soluție:

$$1) \|AB\| = \sqrt{a^2 + b^2}, \|BC\| = \sqrt{b^2 + c^2}, \|CA\| = \sqrt{a^2 + c^2}$$

$$2) \text{ Ducem } \left. \begin{array}{l} OM \perp AB \\ CO \perp (OAB) \end{array} \right\} \Rightarrow CM \perp AB$$



În $\triangle OCM$

$$\|CM\| = \sqrt{c^2 + \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}} = \sqrt{\frac{c^2 a^2 + c^2 b^2 + a^2 b^2}{a^2 + b^2}}$$

$$\sigma[ABC] = \frac{\|AB\| \cdot \|CM\|}{2} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{a^2 c^2 + c^2 b^2 + a^2 b^2}{a^2 + b^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma^2[ABC] = \frac{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}{4}$$

$$\text{Dar } \sigma[OAB] = \frac{ab}{2}$$

$$\alpha[BOC] = \frac{bc}{2}; \sigma[COA] = \frac{ac}{2}$$

$$\text{Deci } \sigma^2[ABC] = \frac{a^2 b^2}{4} + \frac{a^2 c^2}{4} + \frac{b^2 c^2}{4} = \sigma^2[AOB] + \sigma^2[DOC] + \sigma^2[COA].$$

$$3) \text{ Fie } H \text{ proiecția lui } O \text{ pcl. planul } ABC, \text{ deci } OH \perp (ABC) \Rightarrow OH \perp AC \left. \begin{array}{l} OC \perp DA \\ OC \perp OB \end{array} \right\} \Rightarrow OC \perp (OAB) \Rightarrow OC \perp AB \Rightarrow AB \perp (OHC) \Rightarrow AB \perp CH \Rightarrow H \in \text{înălțimi corespunzitoare laturii } AB.$$

La fel se arată că $AC \perp BH$ și deci H este punctul de intersecție al înălțimilor, deci ortocentrul.

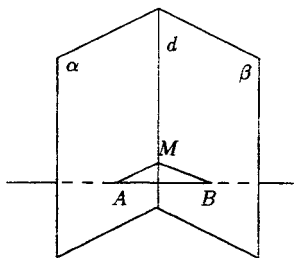
$$4) \|OH\| \cdot \|CM\| = \|OC\| \cdot \|OM\| \Rightarrow OH \cdot \sqrt{\frac{a^2 c^2 + c^2 b^2 + b^2 a^2}{a^2 + b^2}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|OH\| = \frac{\frac{cab}{\sqrt{a^2 + b^2}}}{\sqrt{\frac{a^2 c^2 + c^2 b^2 + b^2 a^2}{a^2 + b^2}}} = \frac{abc}{\sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}}$$

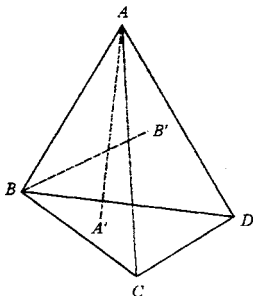
30) Se consideră punctele necoplanare A, B, C, D și dreptele AA', BB', CC', DD' perpendiculare respectiv pe $(BCD), (ACD), (ABD)$. Să se arate că dacă dreptele AA' și BB'

sînt concurente, atunci dreptele CC' , DD' sînt coplanare.

Soluție :



Revenim la problema dată.



Arătăm întâi că dacă o dreaptă este \perp pe două plane

concurente \Rightarrow planele coincid.

$$\left. \begin{array}{l} a \perp \alpha \\ a \perp \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha = \beta.$$

$$\alpha \cap \beta = a$$

Fie $A = a \cap \alpha$, $B = a \cap \beta$, $M \in d$.

$$\left. \begin{array}{l} a \perp \alpha \Rightarrow a \perp AM \\ a \perp \beta \Rightarrow a \perp BM \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABM \text{ are 2 unghiuri drepte.}$$

Fals.

$$\left. \begin{array}{l} AA' \perp (BCD) \Rightarrow AA' \perp CD \\ BB' \perp (ACD) \Rightarrow BB' \perp CD \end{array} \right\} \Rightarrow CD \perp (AA', BB')$$

care fiind concurente determină un plan $\Rightarrow CD \perp AB$.

$$CC' \perp (ABD) \Rightarrow CC' \perp AB$$

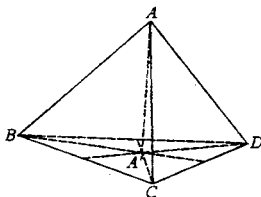
$$DD' \perp (ABC) \Rightarrow DD' \perp AB$$

$$\left. \begin{array}{l} AB \perp CD \\ AB \perp DD' \end{array} \right\} \Rightarrow AB \perp (CDD') \\ \left. \begin{array}{l} AB \perp CD \\ AB \perp CC' \end{array} \right\} \Rightarrow AB \perp (CDC') \\ (CDC') \cap (CDD') = CD \left. \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \text{pr. de la} \\ \text{inceput} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow (CDC') = (CDD') \Rightarrow C, D, C', D' \text{ sînt coplanare} \Rightarrow CC' \text{ și } DD' \text{ sînt coplanare.}$$

31) Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare. Să se arate că $AB \perp CD$ și $AC \perp BD \Rightarrow AD \perp BC$.

Soluție:



Ducem $AA' \perp (BCD)$

$$\left. \begin{array}{l} AA' \perp BC \\ AB \perp DC \end{array} \right\} \Rightarrow DC \perp (ABA') \Rightarrow DC \perp BA'$$

$\Rightarrow BA'$ înălțime în $\triangle BCD$ (1)

$$\left. \begin{array}{l} AA' \perp BD \\ AC \perp BD \end{array} \right\} \Rightarrow BD \perp (AA'C) \Rightarrow BD \perp A'C$$

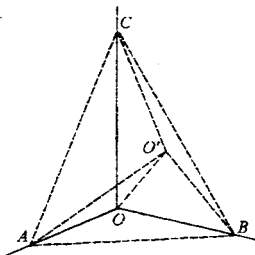
$\Rightarrow A'C$ este înălțime în $\triangle ABC$ (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow A'$ este ortocentrul $\triangle ABC \Rightarrow OA' \perp BC$

$$\left. \begin{array}{l} DA' \perp BC \\ AA' \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (DAA') \Rightarrow BC \perp AD$$

32) Pe muchiile unui unghi cu vârful O se iau punctele A, B, C , a.f. $|OA| \equiv |OB| \equiv |OC|$. Să se arate că piciorul \perp din O pe planul (ABC) coincide cu punctul de intersecție al mediatoarelor $\triangle ABC$.

Soluție:



$$\left. \begin{array}{l} \text{Fie } OO' \perp (ABC) \Rightarrow \begin{array}{l} OO' \perp AO' \\ OO' \perp BO' \\ OO' \perp CO' \end{array} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AOO',$$

$\triangle BOO'$ și $\triangle COO'$ sînt dreptunghice în O' .

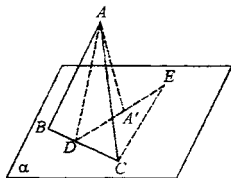
$$\left. \begin{array}{l} \text{Cum } |OA| \equiv |OB| \equiv |OC| \\ |OO'| \text{ latură comună} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle AOO' \equiv \triangle BOO' \equiv \triangle COO'$$

$\Rightarrow \|OA\| = \|BO'\| = \|CO'\| \Rightarrow O'$ este centrul cercului circumscris $\triangle ABC$.

33) Fie vârful A al triunghiului isoscel ABC ($|AB| \equiv |AC|$) se proiectează ortogonal în A' pe un plan α care trece prin BC . Arătați că $\widehat{BA'C} > \widehat{BAC}$.

Soluție:



Fie D mijlocul lui $[BC]$ și $E \in [DA'$ a.i.

$$\|DE\| = \|DA\|$$

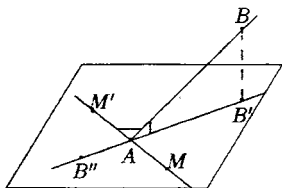
$$\left. \begin{array}{l} AD \text{ mediană în } \triangle isoscel \Rightarrow AD \perp BC \\ AA' \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow A'D \perp BC$$

$$\left. \begin{array}{l} |AD| \equiv |DE| \\ |DC| \text{ comună} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ADC \equiv \triangle DCE \Rightarrow \widehat{DAC} \equiv \widehat{DEC}$$

$$\widehat{DA'C} > \widehat{DEC} \text{ fiind exterior } \triangle CA'E \Rightarrow \widehat{DAC} > \widehat{BAC} \Rightarrow 2\widehat{DA'C} > 2\widehat{DAC} \Rightarrow \widehat{BA'C} > \widehat{BAC}.$$

34) Cu notațiile teoremei 1, fie $[AB'$ semidreapta opusă lui $[AB''$. Să se arate că pentru orice punct $M \in \alpha - [AB''$ avem $B''\widehat{AB} > M\widehat{AB}$.

Soluție:



Fie M un punct în plan și $[AM'$ semidreapta opusă lui AM .

$$\text{Conform teoremei 1} \Rightarrow B'\widehat{AB} < M\widehat{AB} \Rightarrow$$

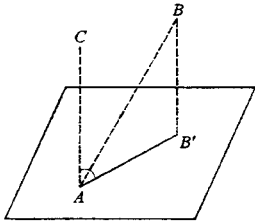
$$\Rightarrow m(B'\widehat{AB}) < M'\widehat{AB} \Rightarrow m(B'\widehat{AB}) < m(M'\widehat{AB}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -m(B'\widehat{AB}) > -m(M'\widehat{AB}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 180^\circ - m(B'\widehat{AB}) > 180^\circ - m(M'\widehat{AB}) \Rightarrow m(B''\widehat{AB}) > m(M\widehat{AB}) \Rightarrow B''\widehat{AB} > M\widehat{AB}.$$

35) Fie α un plan, $A \in \alpha$ și B și C două puncte de aceeași parte a lui α a.i. $AC \perp \alpha$. Arătați că $C\widehat{AB}$ este complement al unghiului format de $[AB$ cu α .

Soluție:



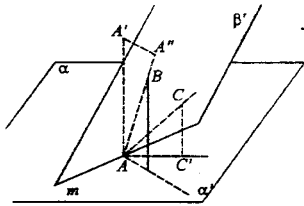
$$\left. \begin{array}{l} \text{Proiectăm } B \text{ pe plan} \Rightarrow BB' \perp \alpha \\ AC \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC \text{ și } BB' \text{ determină un plan } \beta = (AC, BB') \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB \subset \beta \text{ și în acest plan } m(\widehat{CAB}) = 90^\circ - m(\widehat{BAB'})$$

36) Fie α' β' un unghi triedru cu muchia m și $A \in m$. Să se arate că dintre toate semidreptele cu originea A și conținute în semiplanul β' , aceea formează unghiul cel mai mare posibil cu planul α , care este $\perp p \in m$ (suportul ei se numește dreapta de cea mai mare pantă a lui β față de α).

Soluție:



Fie semidreapta $|AB \subset \beta'$ a.i. $AB \perp m$. Fie $|AC$ o altă semidreaptă a.i. $|AC \subset \beta'$. Ducem $BB' \perp \alpha$ și $CC' \perp \alpha$ pentru a obține unghiul celor 2 semidrepte cu α și anume $\widehat{BAB'} > \widehat{CAC'}$. Ducem semidreapta $|AA'$ a.i. $AA' \perp \alpha$ și să se afle de aceeași parte a planului α ca și semiplanul β' .

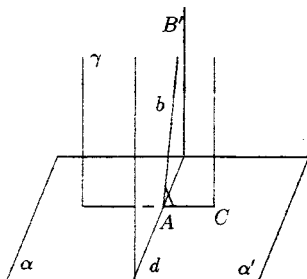
$$\left. \begin{array}{l} AA' \perp \alpha \Rightarrow AA' \perp m \\ AB \perp m \\ A'A'' \perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow A'A'' \perp \beta' \Rightarrow [AB \text{ este proiecția semidreptei } [AA' \text{ pe planul } \beta']$$

$$\beta \stackrel{4.1}{\Rightarrow} A'AB < A'AC \Rightarrow m(A'AB) < m(A'AC) \Rightarrow -m(A'AB) > -m(A'AC) \Rightarrow 90^\circ - m(A'AB) > 90^\circ - m(A'AC) \Rightarrow \widehat{BAB'} > \widehat{CAC'}$$

37) Fie α un plan, σ un semispațiu închis, limitat de α , α' un semiplan conținut în α și a un număr real, cuprins între 0° și 180° . Să se arate că există un singur semiplan β' avind

frontiera comună cu α' a.î. $\beta' \subset \sigma$ și $m(\alpha'\beta') = a$.

Soluție:



Fie d frontiera lui α' și $A \in d$. Ducem un plan \perp pe d în A pe care-l notăm cu γ

$$\left. \begin{array}{l} \gamma \cap c = c \\ d \perp \gamma \end{array} \right\} \Rightarrow d \perp c$$

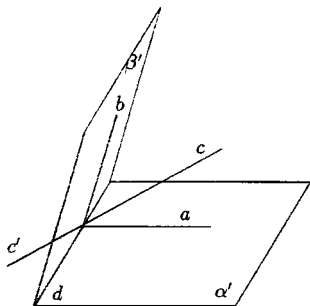
În acest plan există o singură semidreaptă b , cu originea în A , a.î. $m(\widehat{c, b}) = a$.

Semiplanul determinat de d și semidreapta b este cel căutat, căci

$$\left. \begin{array}{l} \text{din } d \perp \gamma \Rightarrow d \perp b \\ d \perp c \end{array} \right\} \Rightarrow m(\alpha'\beta') = m(\widehat{b, c}) = a.$$

38) Fie $(\alpha'\beta')$ un unghi diedru propriu. Construiți un semiplan γ' a.î. $m(\alpha'\beta') = m(\gamma'\beta')$. Arătați că problema are două soluții dintre care una este situată în $\text{int.}\widehat{\alpha'\beta'}$ (numit semiplan bisector al lui $\alpha'\beta'$).

Soluție:



Fie d muchia diedrului și $A \in d$. Ducem $a \perp d$, $a \subset \alpha'$ și $b \perp d$, $b \subset \beta'$ două semidrepte cu originea în A . Rezultă $d \perp (ab)$. Ducem în planul (a, b) semidreapta c a.î. $m(\widehat{ac}) = m(\widehat{cb})$ (1)

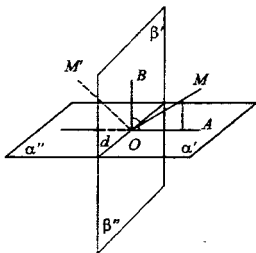
Cum $d \perp (ab) \Rightarrow d \perp c$

$$\left. \begin{array}{l} m(\alpha'\gamma') = m(\widehat{a, c}) \\ m(\gamma'\beta') = m(\widehat{c, b}) \end{array} \right\} \Rightarrow (\alpha'\gamma') = m(\gamma'\beta'). \text{ Dacă vom}$$

considera semidreapta opusă lui c , c' , semiplanul $\gamma'' = (d, c')$ formează de asemenea unghiuri concurente cu cele două semiplane, fiind suplementele celorlalte.

39) Să se arate că locul geometric al punctelor egal depărtate de două plane secante α, β este format din două plane \perp , și anume din reuniunea planelor bisectoare ale unghiurilor diedre de α și β .

Soluție:



Fie M un punct din spațiu egal depărtat de semiplanele $\alpha', \beta' \Rightarrow \|MA\| = \|MB\|$

$$\left. \begin{array}{l} MA \perp \alpha \Rightarrow MA \perp d \\ MB \perp \beta \Rightarrow MB \perp d \end{array} \right\} \Rightarrow d \perp (MAB),$$

unde $d = \alpha \cap \beta$.

$$\begin{aligned} \text{Fie } d \cap (MAB) = \{O\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} d \perp OA \\ d \perp OB \end{array} \right\} &\Rightarrow m(\alpha' \beta') = \\ &= m(\widehat{AOB}). \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} |MA| = |MB| \\ |OM| \text{ latura comună} \\ \text{triunghi drept.} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle MOA \equiv \triangle MOB \Rightarrow \widehat{MOA} \equiv \widehat{MOB} \Rightarrow M \in \text{bisectoarei unghiului}$$

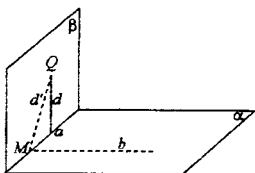
$\widehat{AOB} \Rightarrow M \in \text{semiplanului bisector al unghiului semiplanelor } \alpha', \beta'.$

Dacă M' este egal depărtat de semiplanele β' și α'' se va arăta la fel ca $M' \in \text{semiplanului bisector al acestor semiplane. Presupunem că } M \text{ și } M' \text{ se află în acest plan } \perp \text{ pe } d, \text{ observăm că } m(\widehat{OMM'}) = 90^\circ, \text{ deci cele două semiplane sînt } \perp. \text{ Considerînd și celelalte 2 unghiuri diedre se obțin 2 plane perpendiculare, cele 2 plane bisectoare.}$

Reciproc: se arată ușor că un punct din aceste plane este egal depărtat de planele α și β .

40) Dacă α și β sînt 2 plane \perp , $Q \in \beta$ și $d \perp$ prin Q pe α . Să se arate că $d \subset \beta$.

Soluție:



$$\left. \begin{array}{l} \alpha \perp \beta \\ Q \in \beta \\ d \perp \alpha \\ Q \in d \end{array} \right\} \Rightarrow d \subset \beta.$$

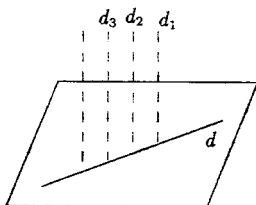
Fie $\alpha \cap \beta = a$. În planul β ducem $d' \perp a$, $Q \in d'$.

Cum $\alpha \perp \beta \Rightarrow m(\widehat{d'b}) = 90^\circ \Rightarrow d' \perp b$
 $\left. \begin{array}{l} d' \perp a \\ d' \perp b \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} d' \perp \alpha \\ \text{dar } d \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow d = d'$ pentru ca dintr-un punct să se poată duce pe un plan o singură perpendiculară.

Cum $d' \subset \beta \Rightarrow d \subset \beta$.

41) Se consideră o dreaptă $d \subset \alpha$. Arătați că reuniunea dreptelor \perp pe α , care intersectează dreapta d , este un plan $\perp \alpha$.

Soluție:

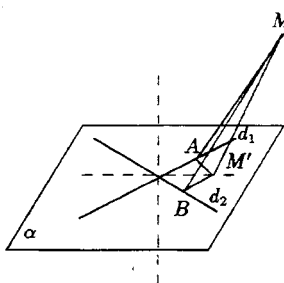


$$\left. \begin{array}{l} \text{Fie } d_1 \perp \alpha \\ d_2 \perp \alpha \\ d_3 \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \Rightarrow \text{dreapta cu aceeași}$$

direcție. Se știe că reuniunea dreptelor care au aceeași direcție și se sprijină pe o dreaptă dată este un plan. Cum acest plan conține o perpendiculară pe α , el este perpendicular pe α .

42) Să se afle locul geometric al punctelor situate la egală distanță de două drepte concurente.

Soluție:



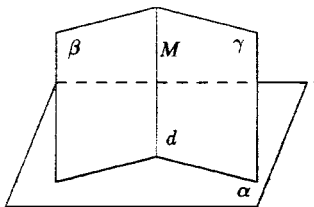
Fie $\alpha = (d_1, d_2)$ planul celor două drepte concurente și M un punct cu proprietatea că $d(M, d_1) = d(M, d_2)$. Ducem $MA \perp d_1$, $MB \perp d_2 \Rightarrow \|MA\| = \|MB\|$. Fie $M' = \text{pr}_\alpha M \Rightarrow \triangle MAM' \equiv \triangle MBM' \Rightarrow \|M'A\| = \|M'B\| \Rightarrow M' \in$ unei bisectoare a unghiului format de cele două drepte, iar M aflându-se pe o dreaptă $\perp \alpha$ ce întâlnește o bisectoare $\xrightarrow{\text{pr.5}} M \in$ unui plan $\perp \alpha$ și care intersectează pe α după o bisectoare. Deci locul geometric

va fi format din două plane $\perp \alpha$ și care intersectează pe α după cele 2 bisectoare ale unghiului formate de d_1 și d_2 . Cele două plane sînt și \perp între ele.

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow \|M'A\| = \|M'B\| \\ \|MM'\| \text{ lat. com.} \end{array} \right\} \Rightarrow MA \perp d_1 \text{ și la fel } MB \perp d_2 \Rightarrow M \text{ are proprietatea din enunț.}$$

43) Arătați că un plan $\alpha \perp$ pe 2 plane secante este \perp pe intersecția lor.

Soluție:

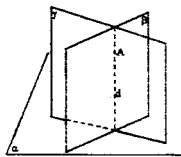


Fie $\beta \cap \gamma = d$ și $M \in d \Rightarrow M \in \beta$, $M \in \gamma$. Ducem \perp din M pe α , dreapta d' .

$$\text{Conform problemei 4} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} d' \subset \beta \\ d' \subset \gamma \end{array} \right\} \Rightarrow d' \subset d \Rightarrow d \perp \alpha.$$

44) Fie A un punct nesituat în planul α . Să se afle intersecția tuturor planelor care conțin punctul A și sînt \perp pe planul α .

Soluție:



Fie β și γ astfel de plane, adică $A \in \beta$, $\beta \perp \alpha$
 $A \in \gamma$, $\gamma \perp \alpha$

Din $A \in \beta$
 $A \in \gamma$ $\left\} \Rightarrow \beta \cap \gamma \neq \emptyset \Rightarrow \text{sînt plane secante și } \perp \text{ pe } \alpha \xrightarrow{\text{pr.1}} \alpha \perp (\beta \cap \gamma) = d, A \in d. \text{ Deci intersecția lor este } \perp \text{ prin } A \text{ pe planul } \alpha.$

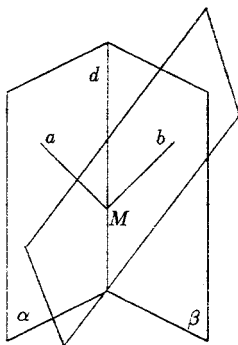
45) Duceți printr-un punct dat un plan \perp pe 2 plane date.

Soluție:

Se proiectează punctul pe cele 2 plane și planul căutat este determinat de cele două perpendiculare.

46) Intersectați un inghi diedru cu un plan a.f. unghiul de secțiuni să fie drept.

Soluție:

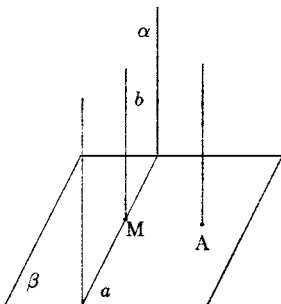


Fie $\alpha \cap \beta = d$ și $M \in d$. Considerăm a semidreaptă cu originea în M , $a \in \alpha$ și construim un plan \perp pe a în M , planul γ .

Întrucât $M \in \beta$
 $M \in \gamma$ } $\Rightarrow \beta \cap \gamma \neq \emptyset$ și fie o semidreapta cu originea în M , $b \subset \beta \cap \gamma \Rightarrow b \subset \beta$, $b \subset \gamma$. Cum $a \perp \gamma \Rightarrow a \perp b$ și planul căutat este cel determinat de semidreptele (a, b) .

47) Arătați că o dreaptă d și un plan α , perpendiculare pe un alt plan sînt paralele între ele sau dreapta d este conținută în α .

Soluție:



Fie $\alpha \cap \beta = a$ și $d \cap \beta = \{A\}$.

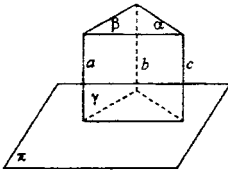
Presupunem că $A \notin a$. Fie $M \in a$, construim $b \perp \beta$, $M \in b \Rightarrow b \subset \alpha$.

$b \perp \beta$, $d \perp \beta \Rightarrow d \parallel b \Rightarrow d \parallel \alpha$.

Dacă $A \in a$
 $d \perp \beta$ } $\Rightarrow d \subset \alpha$.

48) Dacă 3 plane \perp pe un plan se intersectează două cîte două după dreptele a , b , c arătați că $a \parallel b \parallel c$.

Soluție:



$$\alpha \cap \gamma = b$$

$$\alpha \cap \beta = c$$

$$\gamma \cap \beta = a$$

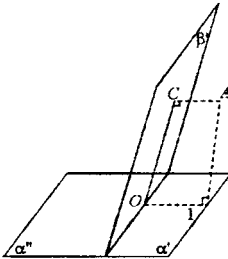
$$\left. \begin{array}{l} \pi \perp \alpha \\ \pi \perp \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \perp c \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi \perp \alpha \\ \pi \perp \gamma \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \perp b \quad (2) \quad \left. \begin{array}{l} \pi \perp \beta \\ \pi \perp \gamma \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \perp a \quad (3)$$

$$\text{Din (1), (2), (3)} \Rightarrow a \parallel b \parallel c.$$

49) Dintr-un punct A se duc perpendicularele AB și AC pe planele fețelor unui unghi diedru $\alpha'\beta'$. Să se arate că $m(\widehat{BAC}) = m(\alpha'\beta')$ sau $m(\widehat{BAC}) = 180^\circ - m(\alpha'\beta')$.

Soluție:



$$\text{Fie } A \in \text{int}(\alpha'\beta'), \alpha \cap \beta = d$$

$$\left. \begin{array}{l} AB \perp \alpha \Rightarrow AB \perp d \\ AC \perp \beta \Rightarrow AC \perp d \end{array} \right\} \Rightarrow d \perp (ABC)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d \cap (ABC) = \{O\} \\ d \perp OC \\ d \perp OB \end{array} \right\} \Rightarrow m(\alpha'\beta') = m(\widehat{BOC})$$

$$\left. \begin{array}{l} m(\widehat{ABO}) = 90^\circ \\ m(\widehat{ACO}) = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow m(\widehat{BAC}) + m(\alpha'\beta') = 180^\circ.$$

$$\Rightarrow m(\alpha'\beta') = 180^\circ - m(\widehat{BAC}) \Rightarrow m(\widehat{BAC}) = 180^\circ - m(\alpha'\beta')$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Fie } A \in \text{int } \alpha''\beta'. \text{ Se arată la fel că } m(\widehat{BAC}) = 180^\circ - m(\alpha''\beta') \\ m(\alpha''\beta') = 180^\circ - m(\alpha'\beta') \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m(\widehat{BAC}) = 180^\circ - 180^\circ + m(\alpha'\beta') = m(\alpha'\beta').$$

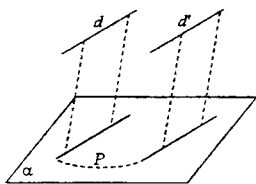
$$\text{Dacă } A \in \text{int}(\alpha''\beta'') \Rightarrow m(\widehat{BAC}) = 180^\circ - m(\alpha'\beta').$$

$$\text{Dacă } A \in \text{int}(\alpha'\beta'') \Rightarrow m(\widehat{BAC}) = m(\alpha'\beta').$$

Proiecții

1) Să se arate: dacă dreptele d și d' sînt paralele, atunci $\text{pr}_\alpha d \parallel \text{pr}_\alpha d'$ sau $\text{pr}_\alpha d = \text{pr}_\alpha d'$.
Ce putem spune despre planele proiectante ale lui d și d' .

Soluție:



Fie $d \parallel d'$, β planul proiectant al lui d .

a) Presupunem $d' \not\subset \beta$, adică planul $d, d' \not\subset \alpha \Rightarrow$ planul proiectant al lui d' este atunci β' . Vrem să arătăm că $\text{pr}_\alpha d \parallel \text{pr}_\alpha d'$. Presupunem prin observații că $\text{pr}_\alpha d \cap \text{pr}_\alpha d' = \{P\} \Rightarrow (\exists) M \in d$ a.i. $\text{pr}_\alpha M = P$ și $(\exists) M' \in d'$ a.i. $\text{pr}_\alpha M' = P$.

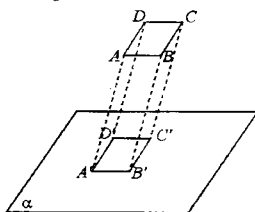
$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} PM \perp \alpha \\ PM' \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow$ în punctul P pe planul α se pot duce 2 perpendiculare distincte. Fals.

Dacă β este planul proiectant al lui d și β' al lui d' , atunci $\beta \parallel \beta'$, căci dacă ar avea un punct comun proiecțiile lor ar trebui să aparțină și $\text{pr}_\alpha d$ și $\text{pr}_\alpha d'$ și deci n-ar mai fi paralele.

b) Dacă $d' \subset \beta$ sau $d \subset \beta'$, adică $(d, d') \perp \alpha \Rightarrow d$ și d' au același plan proiectant $\Rightarrow \text{pr}_\alpha d = \text{pr}_\alpha d'$.

2) Arătați că proiecția unui paralelogram pe un plan este un paralelogram sau un segment.

Soluție:



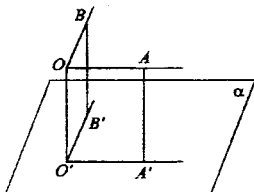
a) Presupunem că $(ABCD) \not\perp \alpha$. Fie A', B', C', D' respectiv proiecțiile punctelor A, B, C, D .

$\left. \begin{array}{l} AB \parallel DC \xrightarrow{\text{pr}_\alpha} A'B' \parallel D'C' \\ AD \parallel BC \Rightarrow A'D' \parallel B'C' \end{array} \right\} \Rightarrow A'B'C'D' \text{ paralelogram.}$

b) Dacă $(ABCD) \perp \alpha \Rightarrow$ proiecțiile $A', B', C', D' \in$ dreptei $(ABCD) \cap \alpha \Rightarrow$ proiecția paralelogramului este un segment.

3) Știind că latura $[OA]$ a unghiului drept AOB este paralelă cu un plan α , să se arate că proiecția pe planul α a unghiului \widehat{AOB} este un unghi drept.

Soluție:



Dacă $OA \parallel \alpha \Rightarrow \text{pr}_{\alpha} OA \parallel OA \Rightarrow O'A' \parallel OA$ întrucât
(\forall) plan ca trece prin OA taie planul α după o paralelă la OA .

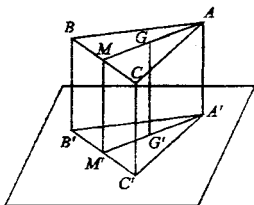
$$\left. \begin{array}{l} OO' \perp O'A' \\ O'A' \parallel OA \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} OA \perp OO' \\ OA \perp OB \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} OA \perp (OO'B) \\ O'A' \parallel OA \end{array} \right\} \Rightarrow O'A' \perp (OO'B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O'A' \perp O'B' \Rightarrow \widehat{A'O'B'} \text{ unghi drept.}$$

4) Fie $A'B'C'$ proiecția $\triangle ABC$ pe un plan α . Arătați că centrul de greutate al $\triangle ABC$ se proiectează în centrul de greutate al $\triangle A'B'C'$. Este valabil un rezultat analog pentru ortocentru?

Soluție:



În trapezul $BCC'B'$ ($BB' \parallel CC'$)

$$\left. \begin{array}{l} |BM| \equiv |MC| \\ MM' \parallel BB' \end{array} \right\} \Rightarrow |B'M'| \equiv |MC'| \Rightarrow A'M' \text{ mediană.}$$

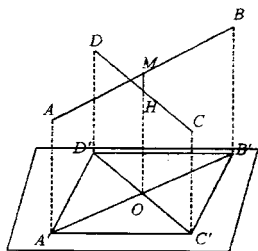
$$\left. \begin{array}{l} MM' \parallel AA' \Rightarrow MM'A'A \text{ trapez} \\ \frac{\|AG\|}{\|GM\|} = 2, GG' \parallel AA' \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\|A'G'\|}{\|G'M'\|} = \frac{\|AG\|}{\|GM\|} = 2 \Rightarrow G' \text{ se află pe mediana}$$

$A'M'$ la $2/3$ de vîrf și $1/3$ de bază. În general nu, căci ar trebui că \star drept AMC să se proiecteze tot după un unghi drept și la fel pentru încă o înălțime. Acest lucru se realizează dacă laturile \triangle sînt paralele cu planul.

5) Fiind date punctele necoplanare A, B, C, D să se determine un plan pe care punctele A, B, C, D se proiectează în vîrfurile un paralelogram.

Soluție:



Fie A, B, C, D cele 4 puncte necoplanare și M, N mijloacele segmentelor $|AB|$ și $|CD|$. M și N determină o dreaptă și fie un plan $\alpha \perp MN \Rightarrow M$ și N se proiectează în același punct O pe α .

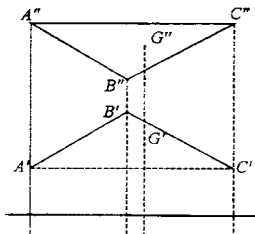
$$\left. \begin{array}{l} AA' \parallel MO \parallel BB' \\ |AM| \equiv |MB| \end{array} \right\} \Rightarrow |A'O| \equiv |OB'|$$

$$\left. \begin{array}{l} CC' \parallel DD' \parallel NO \\ |DN| \equiv |NC| \end{array} \right\} \Rightarrow |D'O| \equiv |OC'|$$

$\Rightarrow A'B'C'D'$ paralelogram.

6) Se consideră toate triunghiurile din spațiu care se proiectează pe un plan α după același triunghi. Să se afle locul geometric al centrului de greutate.

Soluție:



Fie $A'B'C', A''B''C''$ două astfel de Δ , cu proprietatea $\text{pr}_{\alpha} A'B'C' = ABC$, $\text{pr}_{\alpha} A''B''C'' = ABC$.

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{pr}_{\alpha} G' = G \Rightarrow G'G \perp \alpha \\ \text{pr}_{\alpha} G'' = G \Rightarrow G''G \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow$$

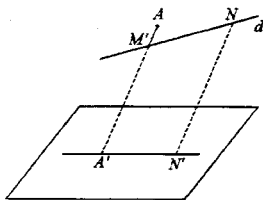
$\Rightarrow G'G = G''G \Rightarrow G'', G', G$ sunt colineare.

Datorită faptului că prin proiecție se păstrează raportul se arată că G' este de greutate al lui A, B, C .

$$\frac{\|BG'\|}{\|GM\|} = \frac{\|B_1G\|}{\|G_1M_1\|} = 2.$$

7) Fie A un punct nesituat pe dreapta d . Determinați un plan α a.f. $\text{pr}_{\alpha} d$ să treacă prin $\text{pr}_{\alpha} A$.

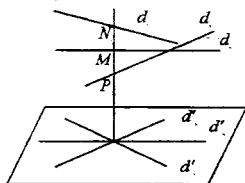
Soluție:



Fie $M \in d$ și $A \notin d$. Cele două puncte determină o dreaptă și fie α un plan perpendicular pe această dreaptă, $AM \perp \alpha \Rightarrow A$ și M se proiectează pe α în același punct A' prin care trece și $\text{pr}_\alpha d = \text{pr}_\alpha A \in \text{pr}_\alpha d$.

8) Determinați un plan pe care trei drepte date să se proiecteze după drepte concurente.

Soluție:



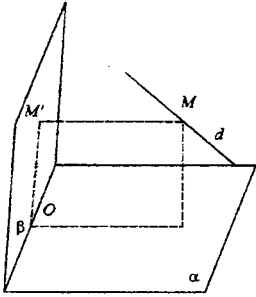
Determinăm o dreaptă care să întâlnească cele 3 drepte în felul următor.

Fie $M \in d_2 \Rightarrow \beta = (M, d_1)$, $\gamma = (M, d_3)$ și $\beta \cap \gamma = d \Rightarrow d \subset \beta_1$, $d \cap d_1 = \{N\}$, $d \subset \gamma_1$, $d \cap d_3 = \{P\}$.

Fie acum un plan $\alpha \perp d \Rightarrow \text{pr}_\alpha M = \text{pr}_\alpha N = \text{pr}_\alpha P = O \Rightarrow \text{pr}_\alpha d_1 \cap \text{pr}_\alpha d_2 \cap \text{pr}_\alpha d_3 \neq \emptyset \Rightarrow d'_1 \cap d'_2 \cap d'_3 = \{O\}$.

9) Fie α, β plane care se taie după o dreaptă a și fie d o dreaptă perpendiculară pe a . Să se arate că proiecțiile dreptei d pe α, β sînt concurente.

Soluție:



Fie $\alpha \cap \beta = a$ și $M \in d$. Proiectăm acest punct pe α și β : $MM' \perp \alpha \Rightarrow \left. \begin{matrix} MM' \perp a \\ d \perp a \end{matrix} \right\} \Rightarrow a \perp (MM', d)$

$MM'' \perp \beta \Rightarrow \left. \begin{matrix} MM'' \perp a \\ d \perp a \end{matrix} \right\} \Rightarrow a \perp (MM'', d) \Rightarrow a \perp$ pe planul proiectant al lui d pe β .

$$\left. \begin{matrix} (MM', d) \perp d \\ (MM'', d) \perp a \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} (MM', d) \parallel (MM'', d) \\ d \text{ dr. comună} \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

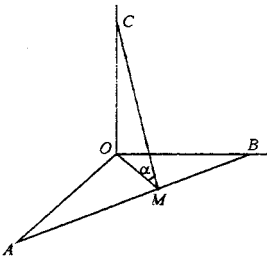
$$\Rightarrow (MM', d) = (MM'', d) = (MM'M'')$$

$$\text{Fie } a \cap (MM'M'') = \{O\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} \text{pr}_\alpha d = OM' \\ \text{pr}_\beta d = OM'' \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow OM' \cap OM'' = \{O\}$ și deci cele două proiecții sînt concurente.

10) Se consideră dreptele OA , OB , OC , \perp două cîte două. Știm că $\|OA\| = a$, $\|OB\| = b$, $\|OC\| = c$. Să se calculeze măsura unghiului planelor (ABC) și (OAB) .

Soluție:



$$\left. \begin{matrix} OC \perp OA \\ OC \perp OB \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} OC \perp (OAB) \\ OM \perp AB \end{matrix} \right\} \Rightarrow CM \perp AB \Rightarrow$$

\Rightarrow unghiul planelor (ABC) și (OAB) este $\widehat{OMC} = \alpha$.

$$\|AB\| = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \|OM\| = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\|OC\|}{\|OM\|} = \frac{c}{\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}} = \frac{c\sqrt{a^2 + b^2}}{ab}.$$

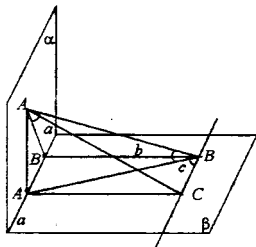
11) O dreaptă taie două plane perpendiculare α și β în A și B . Fie A' și B' proiecțiile punctelor A și B pe dreapta $\alpha \cap \beta$.

1) Arătați că $\|AB\|^2 = \|AA'\|^2 + \|A'B'\|^2 + \|B'B\|^2$

2) Dacă a , b , c sînt măsurile unghiurilor dreptei AB cu planele α , β și cu $\alpha \cap \beta$, atunci

$$\cos c = \frac{\|A'B'\|}{\|AB\|} \text{ și } \sin^2 a + \sin^2 b = \sin^2 c.$$

Soluție:



Fie $\alpha \cap \beta = a$ și $AA' \perp a$, $BB' \perp a$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \perp \beta \\ A \in \alpha \\ AA' \perp a \end{array} \right\} \Rightarrow AA' \perp \beta \Rightarrow AA' \perp A'B \Rightarrow AA' \perp A'B$$

$$\Rightarrow \|AB\|^2 = \|AA'\|^2 + \|A'B\|^2.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Cum } BB' \perp a \\ \beta \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow BB' \perp \alpha \Rightarrow \text{pr}_{\alpha} AB = AB' \Rightarrow \text{drepței } AB \text{ cu } \alpha, \widehat{BAB'} = a$$

$AA' \perp \beta \Rightarrow \text{pr}_{\beta} AB = A'B \Rightarrow \text{drepței } AB \text{ cu } \beta \text{ este } \widehat{ABA'} = b.$

În planul β ducem prin B o paralelă la a și prin A' o paralelă la BB' . Intersecția lor este C , iar $\|A'B'\| = \|BC\|$, $\|BB'\| = \|A'C\|$. Ungiul dreptei AB cu a este $\widehat{ABC} = c$.

$$\text{Cum } AA' \perp \beta \Rightarrow AA' \perp A'C \Rightarrow \|AC\|^2 = \|AA'\|^2 + \|A'C\|^2 = \|AA'\|^2 + \|B'B\|^2 \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} B'BCA \text{ dreptunghi} \Rightarrow A'C \perp CB \\ AA' \perp \beta \end{array} \right\} \Rightarrow AC \perp CB.$$

$\Rightarrow \triangle ACB$ dreptunghic în C .

Împărțim relația (1) cu $\|AB\|^2$

$$\frac{\|AC\|^2}{\|AB\|^2} = \frac{\|AA'\|^2}{\|AB\|^2} + \frac{\|B'B\|^2}{\|AB\|^2} \Rightarrow \sin^2 c = \sin^2 b + \sin^2 a.$$

12) Fie ABC un triunghi situat într-un plan α , $A'B'C'$ proiecția $\triangle ABC$ pe planul α . Notînd cu S , S' , S'' ariile $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$, $\triangle A''B''C''$, să se arate că S' este medie proporțională între S și S'' .

Soluție:

$$S' = S \cos a, \quad a \in (\alpha, \beta)$$

$$S'' = S' \cos a$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos a = \frac{S'}{S''} \\ \cos a = \frac{S''}{S'} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{S'}{S} = \frac{S''}{S'} \Rightarrow S'^2 = SS'' \Rightarrow S' = \sqrt{SS''}.$$

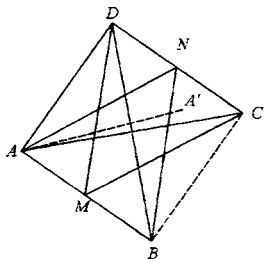
13) Un triedru $[ABCD]$ are $|AC| \equiv |AD| \equiv |BC| \equiv |BD|$. M, N fiind mijloacele muchiilor $[AB], [CD]$ să se arate:

a) $MN \perp AB$, $MN \perp CD$, $AB \perp CD$;

b) Dacă A', B', C', D' sînt picioarele perpendicularelor duse în vîrfurile A, B, C, D pe fețele opuse al tetraedrului, punctele B, A', N sînt colineare și la fel A, B', N ; D, C', M ; C, D', M .

c) AA', BB', MN și CC', DD', MN sînt cîte trei drepte concurente.

Soluție:



$$\left. \begin{array}{l} |AC| \equiv |BC| \Rightarrow \triangle ACB \text{ isoscel} \\ CM \text{ mediană} \end{array} \right\} \Rightarrow CM \perp AB \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} |AD| \equiv |BD| \Rightarrow \triangle ABD \text{ isoscel} \\ DM \text{ mediană} \end{array} \right\} \Rightarrow DM \perp AB \quad (2)$$

$$\text{Din (1) și (2)} \Rightarrow AB \perp (DMC) = \left. \begin{array}{l} AB \perp MN \\ AB \perp DC \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} |BC| \equiv |BD| \\ BN \text{ mediană} \\ |AD| \equiv |AC| \\ AN \text{ mediană} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} BN \perp DC \\ AN \perp DC \end{array} \right\} \Rightarrow DC \perp (ABN) \Rightarrow DC \perp MN$$

b)

$$\left. \begin{array}{l} DC \perp MN \\ DC \perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} DC \perp (ABN) \\ DC \subset (BDC) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (BDC) \perp (ABN) \\ AA' \perp (BDC) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} AA' \subset (ABN) \\ A' \in (BDC) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow A' \in BN \Rightarrow B, A', N$ sînt colineare.

La fel:

Din $(ADC) \perp (ABN) \Rightarrow A, B', N$ colineare

$(ABC) \perp (DMC) \Rightarrow M, D', C$ colineare

$(ABD) \perp (DMC) \Rightarrow D, C', M$ colineare

c) La a) am arătat că $MN \perp AB$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Din } AA' \perp (BDC) \\ BN \subset (DBC) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} AA' \perp BN \\ A' \in BN \end{array} \right\} \Rightarrow AA', BB' \text{ și } MN \text{ sînt înălțimi în } \triangle ABN \text{ deci}$$

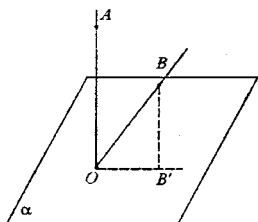
$$\left. \begin{array}{l} \text{Din } BB' \perp (ADC) \\ AN \subset (ADC) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} BB' \perp AN \\ B' \in AN \end{array} \right\}$$

concurente.

La fel DD', CC', MN vor fi înălțimi în $\triangle DMC$.

14) Dacă semidreptele $[OA]$ și $[OB]$ cu originea lor în planul α , $OA \perp \alpha$, $OB \not\perp \alpha$ atunci cele 2 semidrepte formează un unghi ascuțit sau obtuz, după cum sînt sau nu de aceeași parte a planului α .

Soluție:



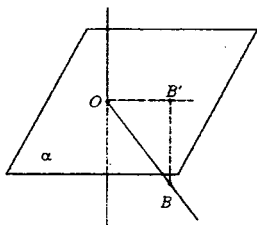
Presupunem că $[OA], [OB]$ sînt de aceeași parte a planului α .

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ducem } BB' \perp \alpha \\ AO \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow BB' \parallel AO \Rightarrow$$

(\exists) planul $(AD, BB') = \beta \Rightarrow [OA], [OB]$ sînt în același semiplan.

$AO \perp \alpha \Rightarrow AO \perp OB', m(\widehat{AOB'}) < 90^\circ \Rightarrow [OB] \subset \text{int } \widehat{AOB'}.$

În planul β avem $m(\widehat{AOB}) = 90^\circ = m(\widehat{AOB'}) < 90^\circ \Rightarrow \widehat{AOB}$ ascuțit.

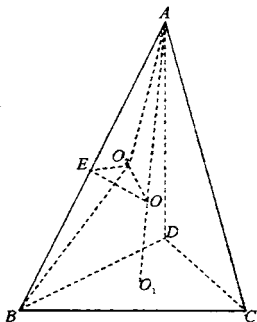


Presupunem că $[OA]$ și $[OB]$ sînt în semispații diferite față de $\alpha \Rightarrow A$ și B sînt în semiplane diferite față de OB' în planul $\beta \Rightarrow [OB'] \subset \text{int.} \widehat{BOA} \Rightarrow m(\widehat{AOB}) = 90^\circ + m(\widehat{BOB'}) > 90^\circ \Rightarrow \widehat{AOB}$ este obtuz.

15) a) Arătați că cele 6 plane mediatoare ale muchiilor unui tetraedru au un punct comun.

b) Prin acest punct trec ș perpendicularare pe fețele tetraedrului, duse prin centrele cercurilor acestor fețe.

Soluție:



Se știe că locul geometric al punctelor din spațiu egal depățate de vîrfurile $\triangle BCD$ este perpendiculara d pe pl. \triangle în centrul cercului circumscris acestui \triangle notat cu O . Ducem planul mediator al laturii $[AC]$ care intersectează aceasta $\perp d$ în punctul O . Punctul O este egal depărtat atunci de toate vîrfurile tetraedrului $\|OA\| = \|OB\| = \|OC\| = \|OD\|$. Unim O cu mijlocul E al laturii $[AB]$. Din $|OA| = |OB| \Rightarrow \triangle OAB$ isoscel $\Rightarrow OC \perp AB$ (1)

Proiectăm O pe planul (ABD) în punctul O_2 .

$$\left. \begin{array}{l} \text{Cum } |OA| = |OB| = |OD| \\ |OO_2| \text{ latură comună} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OAO_2 = \triangle OBO_2 = \triangle ODO_2$$

$\Rightarrow |O_2A| = |BO_2| = |DO_2| \Rightarrow O_2$ este centrul cercului circumscris $\triangle ABD$. La fel se arată că O se proiectează și pe celelalte fețe în centrele cercurilor circumscrise, deci prin O trec toate perpendicularare pe fețele tetraedrului duse prin centrele cercurilor circumscrise. Deci b) este demonstrat.

$$\text{Din } |O_2A| \equiv |O_2B| \Rightarrow \triangle O_2AB \text{ isoscel} \Rightarrow O_2E \perp AB \quad (2)$$

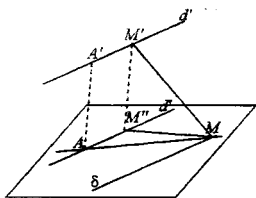
$$\left. \begin{array}{l} \text{Din (1) și (2)} \Rightarrow AB \perp (EO_2O) \\ |AE| \equiv |EB| \end{array} \right\} \Rightarrow (EO_2O) \text{ este plan mediator al laturii } |AB| \text{ și trece}$$

prin O , iar dreapta d îi aparține intersecția celor 3 plane mediatoare ale laturilor $|BC|$, $|CD|$, $|BD|$, deci O este punctul comun pentru cele 6 plane mediatoare ale muchiilor unui tetraedru.

16) Fie d și d' două drepte necoplanare. Să se arate că (\exists) puncte unice $A \in d$, $A' \in d'$ a.î. $AA' \perp d$ și $AA' \perp d'$.

Dreapta AA' se numește perpendiculara comună a dreptelor d și d' .

Soluție:



Fie $M \in d$ și $\delta \parallel d'$, $M \in \delta$. Fie $\alpha = (d, \delta) \Rightarrow d' \parallel \alpha$.

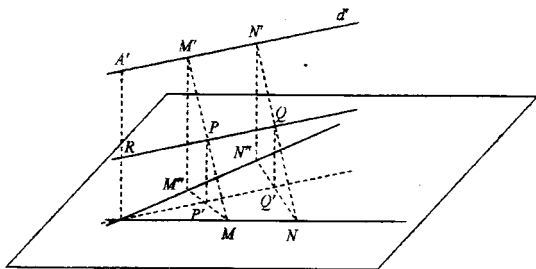
Fie: $d'' = \text{pr}_{\alpha} d' \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow d'' \parallel d' \Rightarrow d'' \parallel d \Rightarrow d' \cap d = \\ d' \parallel, \alpha \end{array} \right. \{A\}$ altfel d și d' ar fi paralele deci coplanare. Fie β planul proiectant al dreptei $d'' \Rightarrow \beta \perp \alpha$
 $\beta \cap \alpha = d''$

În planul β construim perpendiculară pe d'' în punctul A și

$$\left. \begin{array}{l} AA' \perp d'' \\ d' \parallel d'' \end{array} \right\} \Rightarrow AA' \perp d'.$$

17) Cu notațiile problemei precedente fie $M \in d$, $M' \in d'$. Să se arate că $\|AA'\| \leq \|MM'\|$, egalitatea fiind posibilă numai dacă $M = A$ și $M' = A'$.

Soluție:



Ducem $M'M'' \perp d' \Rightarrow M'M'' \perp d \Rightarrow M'M'' \perp M''M \Rightarrow \|M'M\| \geq \|M'M''\| = \|A'A\|$.

Egalitate se obține numai când $M = A$ și $M' = A'$.

18) Fie $AA' \perp$ comună a dreptelor necoplanare d, d' și $M \in d, M' \in d'$ a.i. $|AM| \equiv |A'M'|$. Să se afle locul geometric al mijlocului segmentului $[MM']$.

Soluție:

Fie $M \in d, M' \in d'$ a.i. $|AM| \equiv |A'M'|$. Fie $d'' = \text{pr}_{\alpha} d'$ și $M'M'' \perp d'' \Rightarrow M'M'' \perp \alpha \Rightarrow M'M'' \perp M''M$ și

$$\left. \begin{array}{l} M'' \parallel A'A \\ A'M' \parallel AM'' \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} |A'M'| \equiv |AM''| \\ |A'M'| \equiv |AM| \end{array} \right\} \Rightarrow |AM| \equiv |AM'| \Rightarrow \triangle AMM' \text{ isoscel.}$$

Fie P mijlocul lui $[MM']$ și $P' = \text{pr}_{\alpha} P \Rightarrow PP' \parallel M'M'' \Rightarrow P'$ este mijlocul lui MM'' , AMM'' isoscel $\Rightarrow [AP']$ bisectioneaza $\widehat{M'AM}$. (PP') fiind linie mijlocie în $\triangle M'M''M \Rightarrow \|PP'\| = \frac{1}{2}\|M'M''\| = \frac{1}{2}\|A'A\| = \text{constant}$.

Deci punctul se află la o distanță constantă de dreapta AP' , deci pe o paralelă la această dreaptă situată în planul \perp pe α ce trece prin AP' .

Când $M = A$ și $M' = A' \Rightarrow \|AM\| = \|A'A\| = 0 \Rightarrow P = R$ unde R este mijlocul segmentului $[AA']$. Deci locul geometric trece prin R și cum

$$\left. \begin{array}{l} AA' \perp AP' \\ RP \parallel AP' \end{array} \right\} \Rightarrow RP \perp AA' \Rightarrow RP \text{ este conținută în planul mediator al segmentului } [AA'].$$

Deci RP este intersecția planului mediator al segmentului $[AA']$ cu planul \perp pe α trecând prin una din bisectoarele unghiurilor determinate de d și d' , se mai obține încă o dreaptă conținută în planul mediator al lui $[AA']$ paralela cu cealaltă bisect. a unghiurilor det. de d și d'' .

Deci locul geometric va fi format din două drepte perpendiculare.

* **Reciproc**, fie $Q \in RP$ un punct (\forall) pe această dreaptă și $Q' = \text{pr}_\alpha Q \Rightarrow Q' \in [AP']$ bisectoare. Ducem $NN'' \perp AQ'$ și cum AQ' este și bisectoare și înălțime $\Rightarrow \triangle ANN''$ isoscel $\Rightarrow |AQ'|$ mediană $\Rightarrow |NQ'| \equiv |Q'N''|$.

$$\text{Ducem } N'N'' \perp d'' \Rightarrow \left. \begin{array}{l} |A'N'| \equiv |AN''| \\ |AN''| \equiv |AN| \end{array} \right\} \Rightarrow |AN| \equiv |A'N'|$$

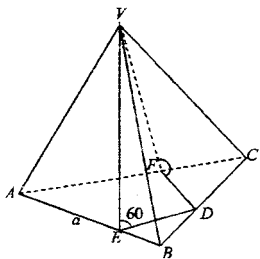
$$QQ'' \parallel N'N'' \Rightarrow Q, Q', N', N'' \text{ coplanare} \Rightarrow N''Q' \in (QQ'N'N'') \Rightarrow N \in (QQ'N'N'')$$

$$\text{Întrucît } \left\{ \begin{array}{l} \|Q'Q\| = \frac{1}{2}\|AA'\| = \frac{1}{2}\|N'N''\| \\ QQ' \parallel N'N'' \end{array} \right\} \Rightarrow |Q'Q| \text{ linie mijlocie în } \triangle NN'N'' \Rightarrow Q, N', N$$

coliniare și $|QN'| \equiv |QN|$.

19) Se consideră un tetraedru $VABC$ cu următoarele proprietăți: ABC este un triunghi echilateral de latură a , $(ABC) \perp (VBC)$, iar planele (VAC) și (VAB) formează cu planul (ABC) unghiuri de măsură 60° . Să se calculeze distanța de la punctul V la planul (ABC) .

Soluție:



$$\begin{aligned} D &= \text{pr}_{BC} V \text{ și } E = \text{pr}_{AB} V \quad FD = \text{pr}_{AC} V \\ (VBC) &\perp (ABC) \Rightarrow VD \perp (ABC) \Rightarrow d(V, \alpha) = \|VD\|, \\ \text{unde } \alpha &= (ABC). \\ \left. \begin{array}{l} VD \perp (ABC) \\ VE \perp AB \\ VD \perp (ABC) \\ VF \perp AC \end{array} \right\} &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} DE \perp AB \Rightarrow m(\widehat{VED}) = 60^\circ \\ DF \perp AC \Rightarrow m(\widehat{VFD}) = 60^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow VD \text{ latură comună} \end{aligned}$$

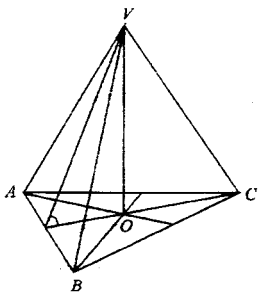
$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \triangle VDE = \triangle VDF &\Rightarrow |ED| \equiv |FD| \\ m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) &= 60^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle EDB \equiv \triangle FDC \Rightarrow |BD| \equiv |DC| \Rightarrow \|BD\| = \frac{a}{2}$$

$$\|ED\| = \frac{a}{2} \cdot \sin 60^\circ = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

$$\|VD\| = \|ED\| \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{3a}{4}$$

20) Toate muchiile unui triedru au lungimea a . Să se arate că un virf se proiectează pe fața opusă în centrul de greutate al acestuia. Să se afle măsură unghiurilor diedre determinate de câte două fețe.

Soluție:



$$\text{Fie } O = \operatorname{pr}_{(BAC)} V; \|VA\| = \|VB\| = \|VC\| = a \left. \begin{aligned} &\Rightarrow \\ &\|VO\| \text{ comună} \end{aligned} \right\}$$

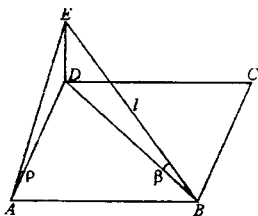
$$\Rightarrow \triangle VAO \equiv \triangle VBO \equiv \triangle VCO \Rightarrow |OA| \equiv |OB| \equiv |OC| \Rightarrow O \text{ este centrul cercului circumscris și cum } \triangle ABC \text{ este echilateral} \Rightarrow O \text{ este centrul de greutate} \Rightarrow \|OM\| = \frac{1}{3} \|MC\| = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$\|VM\| = \|MC\| = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{În } \triangle VOM \Rightarrow \cos(\widehat{VMO}) = \frac{\|OM\|}{\|VM\|} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \widehat{VMO} = \arccos \frac{1}{3}$$

21) Fie DE o dreaptă perpendiculară pe planul patrulaterului $ABCD$. Știind că $\|BE\| = l$ și măsura unghiului format de $[BE$ și (ABC) este β , să se determine lungimea segmentului AE și unghiul lui $[AE$ cu planul (ABC) .

Soluție:



$$\|DE\| = l$$

$$m(\widehat{DBE}) = \beta$$

$$\text{În } \triangle EDB: \|DE\| = l \sin \beta$$

$$\|DB\| = l \cos \beta.$$

$$\text{Dar dacă } \|AB\| = a \Rightarrow \|DB\| = a\sqrt{2}, \text{ deci}$$

$$\|AB\| = \frac{\|DB\|}{\sqrt{2}} = \frac{l \cos \beta}{\sqrt{2}}.$$

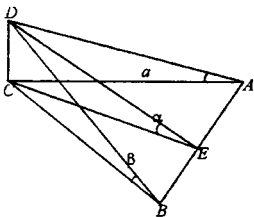
În $\triangle AEB$, dreptunghic în A :

$$\|AE\| = \sqrt{l^2 - \frac{l^2 \cos^2 \beta}{2}} = l \sqrt{\frac{2 - \cos^2 \beta}{2}} = l \sqrt{\frac{1 + \sin^2 \beta}{2}}$$

$$\text{În } \triangle ADE \ (m(\widehat{D}) = 90^\circ) \quad \operatorname{tg} \rho = \frac{\|DE\|}{\|AD\|} = \frac{\rho \sin \beta}{\rho \cos \beta} = \sqrt{2} \operatorname{tg} \beta.$$

22) Dreapta $CD \perp$ planul $\triangle ABC$ echilateral de latură a , iar $[AD]$ și $[BD]$ formează cu planul (ABC) unghiuri de măsură β . Să se găsească unghiul planelor (ABC) și ABD .

Soluție:



$$\left. \begin{array}{l} CE \perp BA \\ DE \perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow \text{pl. } (ABC) \text{ și } ABD \text{ are } m(\widehat{DEC}).$$

$$ABC \text{ echilateral} \Rightarrow \|CE\| = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Din } \triangle CBD: \|DB\| = \frac{a}{\cos \beta} = \|AD\|$$

$$DE^2 = \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 \beta} - \frac{a^2}{2}} = a \sqrt{\frac{\sin \beta}{\cos \beta}} \text{ și}$$

$$\cos \alpha = \frac{\|CO\|}{\|CE\|} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a \sqrt{\frac{\sin \beta}{\cos \beta}}} = \frac{\sqrt{3} \cos \beta}{2 \cdot \sqrt{\sin \beta}}$$

sau

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{\|CD\|}{\|CE\|} = \frac{\frac{a \cdot \sin \beta}{\cos \beta}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{tg} \beta.$$

23) Fiind date planul α și $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ nesituate în acest plan. Să se determine un $\triangle DEF$, așezat în α a.i. pe de o parte dreptele AD , BE , CF și pe de altă parte dreptele $A'D$, $B'E$, $C'F$ să fie concurente.

Soluție:

Considerăm problema rezolvată și luăm în planul α , $\triangle DEF$ apoi punctele O și O' nesituate în α .

Construim și dreptele $|DO|$, $|FO|$, $|EO|$ respectiv $|DO'|$, $|FO'|$, $|EO'|$. Pe aceste semidrepte luăm $\triangle ABC$ și $\triangle A'B'C'$. Evident din modul în care am construit dreptele AD , BE , CF se intersectează în O . Prelungim dreptele BA , BC , CA pînă intersectează planul α în punctele B , C , respectiv A . Apoi prelungim dreptele $C'A'$, $C'B'$, $A'B'$ pînă intersectează planul α în punctele A_2 , C_2 respectiv B_2 .

Evident punctele A_1 , B_1 , C_1 sînt coliniare (pentru că $\in \alpha \cap (ABC)$) de asemenea A_2 , B_2 , C_2 coliniare (deoarece $\in \alpha \cap (A'B'C')$).

Pe o altă parte, punctele D , F , A_1 , A_2 sînt coliniare deoarece:

$$\left. \begin{array}{l} A_1 \in AC(ACOD) \\ \text{cum } A, D, F \subset \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow O, F, A_1 \in \alpha \cap (ACO), \text{ deci coliniare} \quad (1)$$

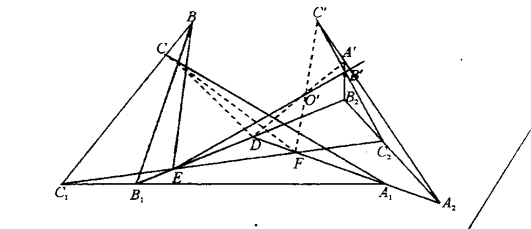
$$A_2 \in O'A' \subset (A'C'ODF)$$

$$D, F, A_2 \in \alpha$$

$$\Rightarrow D, F, A_2 \in \alpha \cap (C'A'O) \Rightarrow D, F, A_2 \text{ coliniare} \quad (2)$$

Din (1) și (2) $\Rightarrow D, F, A_1, A_2$ coliniare. Analog C, E, F, C_2 coliniare și B_1, E, D, D_2 coliniare.

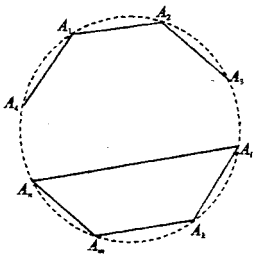
În consecință DEF se află la intersecția dreptelor A_1A_2 , C_1C_2 , B_1B_2 în planul α , deci unic determinat.



Probleme de geometrie și trigonometrie (clasa a X-a)

1) Să se arate că un poligon convex nu poate avea mai mult de trei unghiuri ascuțite.

Soluție:

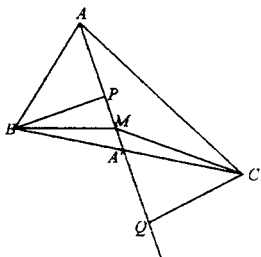


Fie A_1, A_2, \dots, A_n virfurile poligonului convex. Să presupunem că are 4 unghiuri ascuțite. Virfurile acestor unghiuri formează un patrulater convex $A_1 A_k A_m A_n$. Deoarece poligonul este convex, segmentele $|A_1 A_k|$, $|A_k A_m|$, $|A_m A_n|$, $|A_n A_1|$ se află în interiorul poligonului inițial. Obținem că unghiurile patrulaterului sînt ascuțite, ceea ce este absurd, deoarece suma lor este 360° .

Soluția 2. Presupunem că $A_1 A_k A_m A_n$ este un poligon convex, cu toate unghiurile ascuțite \Rightarrow suma unghiurilor exterioare este mai mare decît 360° , ceea ce este absurd (suma măsurilor unghiurilor exterioare unui poligon convex este 360°).

2) Fie ABC un triunghi. Să se găsească locul geometric al punctelor $M \in (ABC)$, pentru care $\sigma[ABM] = \sigma[ACM]$.

Soluție:



Fie $|AA'|$ mediana din A și $CQ \perp AA'$, $BP \perp AA'$

$\triangle BA'P \equiv \triangle CA'Q$ pentru că

$$\begin{cases} \widehat{PBA'} \equiv \widehat{QCA'} \text{ alterne interne} \\ \widehat{PA'B} \equiv \widehat{QA'C} \text{ opuse la vîrf} \\ |BA'| \equiv |CA'| \end{cases}$$

$\Rightarrow \|BP\| = \|CQ\|$ și prin construcție $BP \perp AA'$, $CQ \perp AA'$

Locul geometric căutat este mediana $|AA'|$. Într-adevăr, pentru oricare $M \in |AA'|$ avem $\sigma[ABM] = \sigma[ACM]$

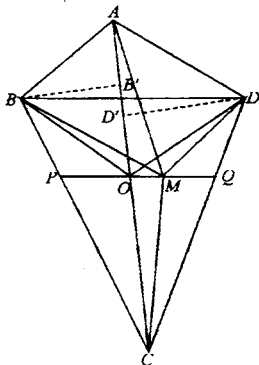
pentru că triunghiurile ABM și ACM au a latură comună $|AM|$ și înălțime corespunzătoare acestei comune egale $\|BP\| = \|QC\|$

Reciproc: Dacă $\sigma[ABM] = \sigma[ACM]$ să demonstrăm că $M \in |AA'|$. Într-adevăr: $\sigma[ABM] = \sigma[ACM] \Rightarrow d(B, AM) = d(C, AM)$, deoarece $|AM|$ latură comună, $d(B, AM) = \|BP\|$ și $d(C, AM) = \|CQ\|$ și ambele sînt perpendiculare pe $AM \Rightarrow PBQC$ paralelogram punctele P, M, Q sînt coliniare (P, Q picioarele perpendicularelor din B și C pe AM).

În paralelogramul $PBQC$ avem $|PQ|$ și $|BC|$ diagonale $\Rightarrow AM$ trece prin mijlocul $|BC|$ deci $M \in |AA'|$ mediana din A .

3) Se dă un patrulater convex $ABCD$. Să se afie locul geometric al punctelor $M \in \text{int.}ABCD$ pentru care $\sigma[MBCD] = \sigma[MBAD]$.

Soluție:



Fie O mijlocul diagonalei $|AC| \Rightarrow \|AO\| = \|OC\|$

$$\sigma[AOD] = \sigma[COD] \quad (1)$$

$$\text{pentru că } \begin{cases} \|AO\| = \|OC\| \\ \|OD'\| \text{ înălțime comună} \end{cases}$$

$$\sigma[AOB] = \sigma[COB] \quad (2)$$

aceleași motive; adunăm (1) și (2) \Rightarrow

$$\sigma[ADOB] = \sigma[DCBO] \quad (3)$$

deci O este un punct al locului căutat.

Construim prin O o paralelă la BD pînă taie laturile $|BC|$ și $|CD|$ în P respectiv Q . Locul geometric căutat este $|PQ|$.

Într-adevăr $(\forall) M \in |PQ|$ avem:

$$\sigma[MBAD] = \sigma[ABD] + \sigma[BDM] = \sigma[ABD] + \sigma[BOD] = \sigma[ABOD].$$

$$\sigma[BDO] = \sigma[BDM] \text{ pentru că } M \text{ și } Q \in \text{unei paralele la } BD.$$

$$\text{iar } \sigma[BCDM] = \sigma[PQC] + \sigma[PMB] + \sigma[MQD] = \sigma[PQC] + \sigma[PBO] + \sigma[OMB] + \sigma[MQD] \doteq$$

$$\sigma[OMB] = \sigma[OMD] \quad (B, D \in \text{unei paralele la } OM)$$

$$\doteq \sigma[PQC] + \sigma[PBO] + \sigma[OMD] + \sigma[MQD] = \sigma[OBCD]$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma[MBAD] = \sigma[ABOD] \\ \text{Deci și } \sigma[BCDM] = \sigma[OBCD] \\ \text{și din (3)} \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma[MBAD] = \sigma[BCDM].$$

Reciproc: Dacă $\sigma[MBCD] = \sigma[MBAD]$ să demonstrăm că $M \in$ paralelei prin O la BD .

Într-adevăr:

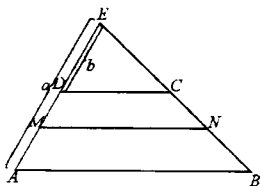
$$\left. \begin{array}{l} \sigma[BCDM] = \sigma[MBAD] \\ \text{și cum } \sigma[BCDM] + \sigma[MBAD] = \sigma[ABCD] \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma[MBCD] = \sigma[MBAD] =$$

$$= \frac{\sigma[ABCD]}{2} \quad (1) \text{ dar și } \sigma[ABOD] = \sigma[OBCD] = \frac{\sigma[ABCD]}{2} \quad (2)$$

Deci din (1) și (2) $\Rightarrow \sigma[ABMD] = \sigma[ABOD] \Rightarrow \sigma[ABD] + \sigma[BDO] = \sigma[ABD] + \sigma[BDM] \Rightarrow \sigma[BDO] = \sigma[BDM] \Rightarrow M$ și O se află pe o paralelă la BD .

4) Să se determine o dreaptă MN , paralelă cu bazele unui trapez $ABCD$ ($M \in [AD]$, $N \in [BC]$) astfel încât diferența ariilor lui $[ABNM]$ și $[MNCD]$ să fie egală cu un număr dat.

Soluție:



Notăm $\|EA\| = a$ și $\|ED\| = b$, $\|EM\| = x$

$$\frac{\sigma[EMN]}{\sigma[EDC]} = \frac{x^2}{b^2} \Rightarrow \frac{[MNCD]}{\sigma[EDC]} = \frac{x^2 - b^2}{b^2} \quad (2)$$

$$\frac{\sigma[EAB]}{\sigma[EDC]} = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow \frac{[ABCD]}{\sigma[EDC]} = \frac{a^2 - b^2}{b^2} \quad (3)$$

$$\text{Din (3) scădem (2)} \Rightarrow \frac{\sigma[ABCD] - \sigma[MNCD]}{\sigma[EDC]} =$$

$$= \frac{a^2 - x^2}{b^2} \Rightarrow \frac{\sigma[ABNM]}{\sigma[EDC]} = \frac{a^2 - x^2}{b^2} \quad (4)$$

$$\text{Din (4) scădem (2)} \Rightarrow \frac{\sigma[ABNM] - \sigma[MNCD]}{\sigma[EDC]} = \frac{a^2 - x^2 - x^2 - b^2}{b^2} \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \frac{k}{\sigma[EDC]} = \\ \text{din ipoteza } \sigma[ABNM] - \sigma[MNCD] = k \end{array} \right.$$

$$= \frac{a^2 + b^2 - 2x^2}{b^2} \Rightarrow \frac{kb^2}{\sigma[ECD]} - a^2 - b^2 = -2x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{(a^2 + b^2)\sigma[ECD] - kb^2}{\sigma[ECD]}$$

$$\text{Din relația (3) notînd } \sigma[ABCD] - S \Rightarrow \sigma[ECD] = \frac{Sb^2}{a^2 - b^2}$$

Înlocuind aceasta în relația lui x^2 obținem:

$$x^2 = a^2 + b^2 - kb^2 \frac{a^2 - b^2}{Sb^2} \Rightarrow x^2 = \frac{(a^2 + b^2)s - k(a^2 - b^2)}{S} \Rightarrow$$

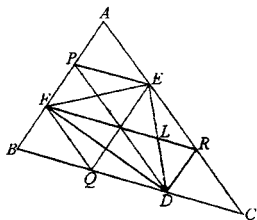
$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} x^2 &= \frac{(s-k)a^2 + (s+k)b^2}{S} \\ x &= \|EM\| \end{aligned} \right\} \Rightarrow \|EM\| = \sqrt{\frac{(s-k)a^2 + (s+k)b^2}{S}} \text{ și ținînd seama de}$$

faptul că $\|EM\| = \|DM\| + b$

avem $\|DM\| = \sqrt{\frac{(s-k)a^2 + (s+k)b^2}{S}}$ deci avem poziția punctului M pe segment $|DA|$ (era însă suficient și calcularea distanței $\|EM\|$).

5) Pe laturile $\triangle ABC$ se iau punctele D, E, F astfel încît $\frac{\|BD\|}{\|DC\|} = \frac{\|CE\|}{\|EA\|} = \frac{\|AF\|}{\|FB\|} = 2$.
Să se afle raportul ariilor triunghiurilor DEF și ABC .

Soluție:



Se observă din construcție că $EQ \parallel AB \parallel RD$ mai mult, acestea sînt paralele echidistante. Analog EQ, PD, AC și AB, EQ, RD sînt de asemenea paralele echidistante

$$(\|AP\| = \|PF\| = \|FB\|; \|AE\| = \|ER\| = \|RC\|,$$

$$\|BQ\| = \|QD\| = \|DC\|).$$

$$\text{Notăm } \sigma[BQ] = S.$$

Bazîndu-ne pe proprietățile:

- două triunghiuri au arii egale dacă au baze egale și aceeași înălțime;
- două triunghiuri au arii egale dacă au aceeași bază și al treilea vîrf pe o paralelă la bază.

Avem:

$$\sigma[ABC] = \sigma[AFE] + \sigma[FER] + \sigma[FBO] + \sigma[FRD] + \sigma[DRC] = 9S$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma[FEL] &= \sigma[FER] - \sigma[ELR] = 2S - \sigma[ELR] \\ \sigma[FDL] &= \sigma[FRD] - \sigma[RLD] = 2S - \sigma[RLD] \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{prin adunare}}$$

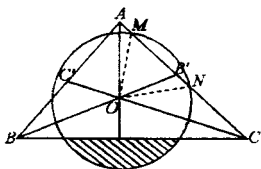
$$\Rightarrow \sigma[DEF] = 4S - (\sigma[ELR] + \sigma[RLD]) = 4S - S = 3S.$$

$$\text{Deci } \frac{\sigma[DEF]}{\sigma[ABC]} = \frac{3S}{9S} = \frac{1}{3}$$

(eventual pot fi aranjate ariile S).

6) Se consideră un triunghi echilateral ABC și discul $\left[C \left(O, \frac{a}{3} \right) \right]$ unde O este ortocentrul triunghiului și $a = \|AB\|$. Să se determine aria $[ABC] - \left[C \left(O, \frac{a}{3} \right) \right]$.

Soluție:



$$\|OB\| = \frac{a\sqrt{3}}{6} \quad (BB' \text{ mediană})$$

În $\triangle MOB'$:

$$\cos \widehat{MOB'} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\frac{a}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \mu(\widehat{MOB'}) = \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{Deci } \mu(\widehat{MON}) = \frac{\pi}{3}.$$

Notăm cu Σ suprafața din disc limitată de o latură a triunghiului în exteriorul triunghiului.

$$\sigma[\Sigma] = \sigma[\text{sector circular } MON] - \sigma[MON] = \frac{\pi a^2}{9 \cdot 6} - \frac{a^2}{9 \cdot 2} \sin 60^\circ = \frac{\pi a^2}{9 \cdot 6} - \frac{a^2 \sqrt{3}}{4 \cdot 9} = \frac{a^2}{18} \cdot \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Dacă prin aria discului vom scădea de 3 ori $\sigma[\Sigma]$ vom afla aria porțiunii din disc din int.

ABC . Deci aria suprafeței din disc din int. ABC este:

$$\frac{\pi a^2}{9} - 3 \frac{a^2}{18} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\pi a^2}{9} - \frac{\pi a^2}{18} + \frac{a^2 \sqrt{3}}{12} = \frac{\pi a^2}{18} + \frac{a^2 \sqrt{3}}{12}.$$

Aria căutată se obține scăzând din $\sigma[ABC]$, aria calculată.

$$\text{Deci } \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} - \frac{\pi a^2}{18} - \frac{2a^2 \sqrt{3}}{12} = \frac{2a^2 \sqrt{3}}{12} - \frac{\pi a^2}{18} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{6} - \frac{\pi a^2}{18} = \frac{a^2}{18} (3\sqrt{3} - \pi).$$

7) Să se arate că în orice triunghi ABC avem:

$$a) 1 + \cos A \cos(B - C) = \frac{b^2 + c^2}{4R^2}$$

$$b) (b^2 + c^2 - a^2) \operatorname{tg} A = 4S$$

$$c) \frac{b+c}{2c \cos \frac{A}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{A}{2} + C\right)}{\sin(A+B)}.$$

$$d) p = r \left(\operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} C \right)$$

$$e) \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \frac{p}{r}$$

Soluție:

$$a) 1 + \cos A \cdot \cos(B-C) = \frac{b^2 + c^2}{4R^2}$$

$$\begin{aligned} 1 + \cos A \cos(B-C) &= 1 + \cos[\pi - (C+B)] \cos(B-C) = 1 - \cos(B+C) \cdot \cos(B-C) = \\ &= 1 - \frac{1}{2}[\cos 2B + \cos 2C] = 1 - \frac{1}{2}[2\cos^2 B - 1 + 2\cos^2 C - 1] = 2 - \cos^2 B - \cos^2 C = \sin^2 B + \\ &+ \sin^2 C \stackrel{\text{din T. sin}}{=} \frac{b^2}{4R^2} + \frac{C^2}{4R^2} = \frac{b^2 + c^2}{4R^2}. \end{aligned}$$

$$b) (b^2 + c^2 - a^2) \operatorname{tg} A = 4S$$

Soluție:

$$\text{Se demonstrează că } \operatorname{tg} A = \frac{4S}{b^2 + c^2 - a^2}.$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} A &= \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{2 \cos^2 \frac{A}{2} - 1} = \frac{2 \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{(bc)^2}}}{2 \frac{p(p-a)}{bc} - 1} = \frac{2S}{bc \left(\frac{2p(p-a) - bc}{bc} \right)} = \\ &= \frac{2S}{bc \left(\frac{2p(p-a) - bc}{bc} \right)} = \frac{2S}{2 \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} - bc} = \\ &= \frac{4S}{ab + ac - a^2 + b^2 + bc - ba + bc + c^2 - ac - 2bc} = \frac{4S}{b^2 + c^2 - a^2}. \end{aligned}$$

$$d) \text{ Să demonstrăm că } \operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} C = \frac{p}{r}.$$

Soluție:

Într-adevăr

$$\operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}}.$$

$$\sqrt{\frac{p(p-b)}{(p-a)(p-c)}} \cdot \sqrt{\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}} = p \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2}} = \frac{p^2}{S} \stackrel{S=pr}{=} \frac{p^2}{pr} = \frac{p}{r}.$$

Rămâne acum să demonstrăm că:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} &= \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \Leftrightarrow \text{Într-adevăr} \\ \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{A}{2}} + \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{B}{2}} + \operatorname{tg} \frac{A+B}{2} &= \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2}} \cdot \operatorname{tg} \frac{A+B}{2} \Leftrightarrow \frac{\operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2}} + \\ + \frac{\operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2}} &= \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2}} \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2}} + \frac{1}{1 - \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2}} = \\ \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot (1 - \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2})} &\Leftrightarrow \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot (1 - \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2})} = \\ &= \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot (1 - \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2})} \quad (a) \end{aligned}$$

q.e.d.

$$\begin{aligned} c) \frac{b+c}{2c \cos \frac{A}{2}} &= \frac{\sin(\frac{A}{2} + C)}{\sin(A+B)} \stackrel{A+B=C}{=} \frac{b+c}{2c \cos \frac{A}{2}} = \frac{\sin(\frac{A}{2} + C)}{\sin C} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{b+c}{2c \cos \frac{A}{2}} &= \frac{\sin A \cos C + \sin C \cos \frac{A}{2}}{\sin C} \Rightarrow (b+c) \sin C = 2C \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \cos C + \end{aligned}$$

$$2c \sin C \cos^2 \frac{A}{2} \Rightarrow (b+c) \sin C = c \sin A \cos C + 2c \sin C \cos^2 \frac{A}{2} \text{ și}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow (b+c) \frac{ac}{2k} \cos C = \frac{2c^2 \cos^2 \frac{A}{2}}{2R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b+c = a \cos C + 2 \cos^2 \frac{A}{2} \Rightarrow b+c = a \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + 2c \frac{p(p-a)}{bc} \Rightarrow b+c =$$

$$= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b} + \frac{2p(p-a)}{b} \Rightarrow 2b^2 + 2bc = a^2 + b^2 - c^2 + (a+b+c)(c+b-a) \Rightarrow$$

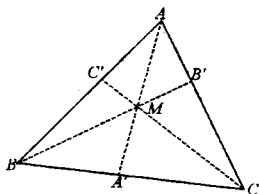
\Rightarrow Toți termenii se reduc.

8) Dacă H este ortocentrul triunghiului ABC , să se arate că:

a) $\|AH\| = 2R \cos A$;

b) $a\|AH\| + b\|BH\| + c\|CH\| = 4S$.

Soluție:



a) În triunghiul ABB' : $\|AB'\| = c \cos A$

$$\begin{aligned} \text{În } \triangle AHB': \cos \widehat{HAB'} &= \|AB'\| : \|AH\| \Rightarrow \|AH\| = \\ &= \frac{\|AB'\|}{\cos \widehat{HAB'}} = \frac{\|AB'\|}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - C\right)} = \frac{c \cos A}{\sin C} \stackrel{T. \sin}{=} \frac{c \cos A}{\frac{c}{2R}} = \\ &= 2R \cos A \Rightarrow \|AH\| = 2R \cos A. \end{aligned}$$

b) $a\|AH\| + b\|BH\| + c\|CH\| = 2R(a \cos A + b \cos B + c \cos C) \stackrel{T. \sin}{=} 4R^2(\sin A \cos A +$
 $+ \sin B \cos B + \sin C \cos C) = 2R^2(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C).$

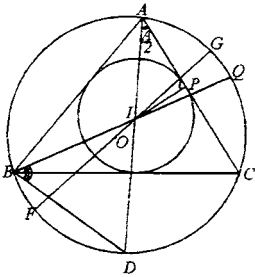
Am folosit: $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$.

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = \underbrace{2 \sin(A+B) \cos(A-B)}_{\sin C} + 2 \sin C \cos C =$$

$$= 2 \sin C [\cos(A-B) - \cos(A+B)] = 2 \sin C \cdot 2 \sin A \sin B = 4 \sin A \sin B \sin C.$$

9) Dacă O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC iar I este centrul cercului înscris, să se arate că $\|OI\|^2 = R(R - 2r)$.

Soluție:



Folosind puterea punctului I față de cercul $C(O, R)$

$$\Rightarrow \|IG\| \cdot \|IF\| = \|AI\| \cdot \|ID\| \quad (1)$$

$$\text{dar } \|IG\| \cdot \|IF\| = (R - \|OI\|)(\|R + \|OI\|) \Rightarrow$$

$$\|IG\| \cdot \|IF\| = R^2 - \|OI\|^2.$$

$$\text{Ținând seama de (1) avem } \|IA\| \cdot \|ID\| = R^2 - \|OI\|^2.$$

Calculăm acum distanțele $\|IA\|$ și $\|ID\|$

În triunghiul $\triangle IAP$

$$\|IA\| = \frac{r}{\sin \frac{A}{2}} \quad (2)$$

Calculăm și pe $\|ID\|$:

$\mu(\widehat{BID}) = \mu(\widehat{DBI})$ au aceeași măsură, mai precis:

$$\mu(\widehat{BID}) = \frac{m(\widehat{BD}) + m(\widehat{AQ})}{2} = \frac{m(\widehat{A}) + m(\widehat{B})}{2}$$

$$m\left(\frac{\widehat{DCQ}}{2}\right) = m(\widehat{DBI}) \text{ Deci } \|ID\| = \|BD\|. \quad (3)$$

În $\triangle ABD$ cu teorema sinusilor avem:

$$\frac{\|BD\|}{\sin \frac{A}{2}} = 2R \Rightarrow \|BD\| = 2R \sin \frac{A}{2}. \text{ Deci ținând seama de (3)}$$

$$\|ID\| = 2R \sin \frac{A}{2}. \quad (4)$$

$$\text{Revenind în relația } \|IA\| \cdot \|ID\| = R^2 - \|OI\|^2 \text{ cu (2) și (4) avem: } \frac{r}{\sin \frac{A}{2}} \cdot 2R \sin \frac{A}{2} =$$

$$R^2 - \|OI\|^2 \Rightarrow \|OI\|^2 = R^2 - 2Rr \Rightarrow \|OI\|^2 = R(R - 2r).$$

$$10) \text{ Să se arate că în orice triunghi } ABC \text{ avem: } \cos^2 \frac{B-C}{2} \geq \frac{2r}{R}.$$

Soluție:

$$r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \Rightarrow r = 2R \sin \frac{A}{2} \left(\cos \frac{B-C}{2} - \underbrace{\cos \frac{B+C}{2}}_{\sin \frac{A}{2}} \right) \Rightarrow$$

$$r = 2R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} - 2R \sin^2 \frac{A}{2} \Rightarrow 2R \sin^2 \frac{A}{2} - 2R \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{B-C}{2} + r \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta \geq 0 \Rightarrow 4R^2 \cos^2 \frac{B-C}{2} - 8Rr \geq 0 \Rightarrow R^2 \cos^2 \frac{B-C}{2} - 2Rr \geq 0 \Rightarrow \cos^2 \frac{B-C}{2} \geq \frac{2r}{R}$$

Nota. Rămâne să arătăm că $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{r}{4R}$.

Într-adevăr:

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc} \cdot \frac{(p-a)(p-c)}{ac} \cdot \frac{(p-a)(p-b)}{ab}} =$$

$$= \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{pabc} \stackrel{\substack{\text{f-ia Heron} \\ \text{și } abc \equiv 4RS}}{=} \frac{S^2}{p4RS} = \frac{pr}{p4R} = \frac{r}{4R}$$

11) Să se calculeze $z^n + \frac{1}{z^n}$ știind că $z + \frac{1}{z} = 2 \sin a$

Soluție:

$$z + \frac{1}{z} = 2 \sin a \Rightarrow z^2 - 2(\sin a)z + 1 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{\sin a \pm \sqrt{\sin^2 a - 1}}{1}$$

$$\Rightarrow z_{1,2} = \sin a \pm \sqrt{-\cos^2 a} \Rightarrow z_{1,2} = \sin a \pm i \cos a$$

$$z_1 = \sin a + i \cos a$$

Deci

$$z_2 = \sin a - i \cos a = \bar{z}_1$$

Calculăm pentru z_1 și z_2 :

$z_1^n + \frac{1}{z_1^n} = z_1^n + \left(\frac{1}{z_1}\right)^n = z_1^n + z_2^n$, deci $z^n + \frac{1}{z^n}$ ia aceiași valoare și pentru z_1 , și pentru z_2 și este suficient să calculăm pentru z_1 .

$$z_1^n + \frac{1}{z_1^n} = (\sin a + i \cos a)^n + \frac{1}{(\sin a + i \cos a)^n} = \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} - a \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - a \right) \right]^n +$$

$$+ \frac{1}{\left[\cos \left(\frac{\pi}{2} - a \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - a \right) \right]^n} = \cos \left[n \left(\frac{\pi}{2} - a \right) \right] + i \sin \left[n \left(\frac{\pi}{2} - a \right) \right] +$$

$$+ \cos \left[n \left(\frac{\pi}{2} - a \right) \right] - i \sin \left[n \left(\frac{\pi}{2} - a \right) \right] = 2 \cos \left[n \left(\frac{\pi}{2} - a \right) \right] \stackrel{\cos. \text{ par}}{=} 2 \cos \left(na - \frac{a\pi}{2} \right).$$

$$\text{Analog } z_2^n + \bar{z}_2^n = 2 \cos \left[n \left(a - \frac{\pi}{2} \right) \right].$$

12) Să se rezolve ecuația: $(z+1)^n - (z-1)^n = 0$

Soluție:

$$\begin{aligned}
 (z+1)^n - (z-1)^n &= a \Rightarrow (z+1)^n = (z-1)^n \Rightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1 \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{z+1}{z-1} &= \sqrt[n]{1} \Rightarrow \frac{z+1}{z-1} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \Rightarrow \\
 \Rightarrow z+1 &= \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}\right) z - \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}\right) \Rightarrow \\
 \Rightarrow \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} - 1\right) z &= \left(1 + \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}\right) \Rightarrow \\
 \Rightarrow \left(-2 \sin^2 \frac{k\pi}{n} + 2i \sin \frac{k\pi}{n} \cos \frac{k\pi}{n}\right) z &= 2 \cos^2 \frac{k\pi}{n} + 2i \sin \frac{k\pi}{n} \cos \frac{k\pi}{n} \Rightarrow \\
 \Rightarrow z &= \frac{2 \cos \frac{k\pi}{n} \left(\cos \frac{k\pi}{n} + i \sin \frac{k\pi}{n}\right)}{-2 \sin^2 \frac{k\pi}{n} + 2i \sin \frac{k\pi}{n} \cos \frac{k\pi}{n}} = (\text{înlocuim } -1 \text{ cu } i^2 \text{ la numitor}) \\
 &= \frac{2 \cos \frac{k\pi}{n} \left(\cos \frac{k\pi}{n} + i \sin \frac{k\pi}{n}\right)}{2i \sin \frac{k\pi}{n} \left(\cos \frac{k\pi}{n} + i \sin \frac{k\pi}{n}\right)} = \frac{\cos k\pi}{i \sin \frac{k\pi}{n}} = \frac{i}{i^2} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{n} = -i \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{n}.
 \end{aligned}$$

13) Să se demonstreze că dacă $|z| < \frac{1}{2}$, atunci $|(1+i)z^3 + iz| < \frac{3}{4}$.

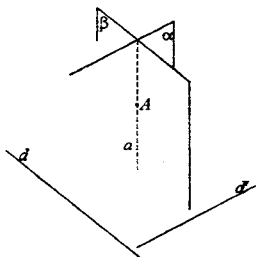
Soluție:

Într-adevăr:

$$\begin{aligned}
 |(1+i)z^3 + iz| &\stackrel{\substack{\text{prop. modulului} \\ |a+b| \leq |a| + |b|}}{\leq} |(1+i)z^3| + |iz| \stackrel{\substack{\text{prop. } |ab|=|a| \cdot |b| \\ \text{si pt. numere complexe}}}{=} |1+i| \cdot |z^3| + |i| \cdot |z| = \\
 \stackrel{\substack{|1+i|=2 \\ |i|=1}}{=} 2|z^3| + |z| &\stackrel{\text{ip.}}{\leq} 2 \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \Rightarrow |(1+i)z^3 + iz| \leq \frac{3}{4}.
 \end{aligned}$$

14) Se dau dreptele d și d' . Să se arate că prin fiecare punct al spațiului trece o dreaptă perpendiculară pe d și d' .

Soluție:



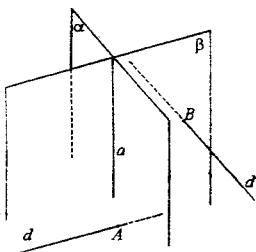
Construim $\alpha \perp d$ și $A \in \alpha$. Planul α astfel construit este unic. Analog construim $\beta \perp d'$ și $A \in \beta$, $\alpha \cap \beta = a \ni A$.

Din $\alpha \perp d \Rightarrow d \perp a$
Din $\beta \perp d' \Rightarrow d' \perp a$ } $\Rightarrow a$ este o dreaptă ce trece prin

A și este perpendiculară și pe d și pe d' . Dreapta a este unică, deoarece α și β construite ca mai sus sînt unice.

15) Se dau dreptele d și d' nesituate în același plan și punctele $A \in d$, $B \in d'$. Să se afle locul geometric al punctelor M pentru care:

$$\text{pr}_d M = A \text{ și } \text{pr}_{d'} M = B.$$



Construim planul α astfel încît $A \in \alpha$ și $d \perp \alpha$.

Construim planul β astfel încît $B \in \beta$ și $d' \perp \beta$.

Planele α și β astfel construite sînt unice. Fie

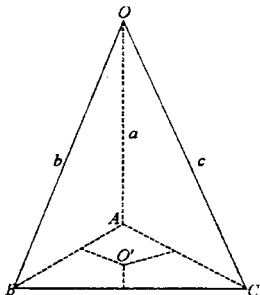
$a = \alpha \cap \beta \Rightarrow a \subset \alpha$ deci $(\forall) M \in a$ are proprietatea $\text{pr}_d M = A$.

$a \subset \beta \Rightarrow (\forall) M \in a$ are proprietatea $\text{pr}_{d'} M = B$.

Reciproc. Dacă în spațiu există un punct M astfel încît $\text{pr}_d M = A$ și $\text{pr}_{d'} M = B \Rightarrow M \in \alpha$ și $M \in \beta \Rightarrow M \in \alpha \cap \beta \Rightarrow M \in a$.
(α și β construite anterior)

16) Să se găsească locul geometric al punctelor din interiorul unui triedru \widehat{abc} egal depărtate de muchiile lui a , b , c .

Soluție:



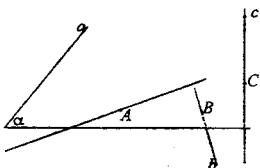
Fie $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$ astfel încât $\|OA\| = \|OB\| = \|OC\|$. Triunghiurile OAB , OBC , OAC sunt isoscele. Planele mediatoare ale segmentelor $\|AB\|$, $\|AC\|$, $\|BC\|$ trec prin O și O' (centrul cercului circumscris triunghiului ABC). Semidreapta $|OO'|$ este locul geometric căutat.

Într-adevăr $(\forall) M \in |OO'| \Rightarrow M \in$ palnului mediator al segmentelor $|AB|$, $|AC|$ și $|BC| \Rightarrow M$ este egal depărtat de a , b și c .

Reciproc: $(\forall) M$ cu proprietatea: $d(M, a) = d(M, b) = d(M, c) \Rightarrow M \in$ palnului mediator, planelor mediatoare ale segmentelor $|AB|$, $|AC|$, $|BC| \Rightarrow M \in$ intersecției acestor plane $\Rightarrow M \in |OO'|$.

17) Să se construiască o dreaptă care să intersecteze două drepte date și să fie perpendiculară pe altă dreaptă dată.

Soluție:



Fie a , b , c cele 3 drepte din spațiu.

I. Presupunem $a \not\perp c$ și $b \not\perp c$. Fie α un plan astfel încît:

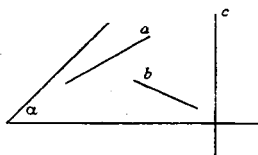
$$\alpha \cap c = \{C\}$$

$$\alpha \cap a = \{A\} \text{ și } \alpha \perp c$$

$$\alpha \cap b = \{B\}$$

Construcția este posibilă pentru că $a \not\perp c$ și $b \not\perp c$. Dreapta AB întâlnește pe a pe p și este perpendiculară pe c , deoarece $AB \subset \alpha$ și $c \perp \alpha$.

II. Dacă $a \perp c$ sau $b \perp c$, construcția nu este mereu posibilă decît dacă planul $p(a, b)$ este perpendicular pe c .

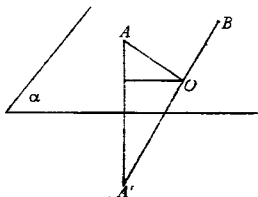


III. Dacă $a \perp c$ și $b \not\perp c$, construim planul $\alpha \perp c$ astfel încât $a \subset \alpha$ și $b \cap \alpha \neq \emptyset$.

Orice punct de pe dreapta a unit cu punctul $b \cap \alpha$ este o dreaptă căutată.

18) Fiind date punctele A și B situate de aceeași parte a unui plan, să se afle în acest plan punctul pentru care suma distanțelor sale la A și B este minimă.

Soluție:

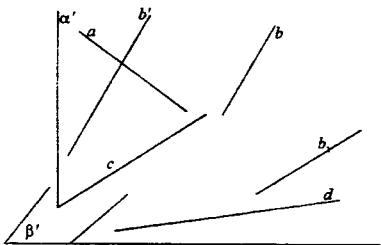


Se construiește A' simetricul lui A față de α . A' și B sînt în semispații opuse, $\alpha \cap |A'B| = O$.

O este punctul căutat, deoarece $\|OA\| + \|OB\| = \|OA'\| + \|OB\|$ este minimă cînd $O \in |A'B|$, deci punctul căutat este $O = |A'B| \cap \alpha$.

19) Printr-o dreaptă să se ducă un plan pe care proiecțiile a două drepte să fie paralele.

Soluție:



Fie a, b, d cele 3 drepte date și prin d să construim un plan în care a și b să se proiecteze

după drepte paralele.

Fie A un punct arbitrar pe a . Prin A construim dreapta $b' \parallel b$. Din construcție rezultă $b \parallel \alpha$, $\alpha = p(a, b')$.

Fie β astfel încât $d \subset \beta$ și $\beta \perp \alpha$.

Dreptele a și b' se proiectează în β după aceeași dreaptă c . Dreapta b se proiectează în β după b_1 și $b_1 \parallel c$.

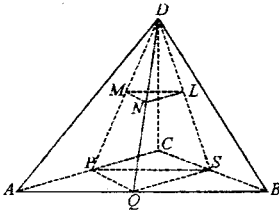
Dacă $b_1 \nparallel c \Rightarrow s \cap b_1 = \{N\} \Rightarrow \alpha \cap p(b, b_1) \neq \emptyset \Rightarrow b \cap \alpha \neq \emptyset$, absurd pentru că $b \parallel \alpha$ ($b \parallel b'$).

20) Se consideră un tetraedru $[ABCD]$ și centrele de greutate L , M , N ale triunghiurilor BCD , CAD , ABD .

a) Să se arate că $(ABC) \parallel (LMN)$;

b) Să se afle raportul $\frac{\sigma[ABC]}{\sigma[LMN]}$.

Soluție:



M centru de greutate în $\triangle ACD \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{|MD|}{|MP|} = 2 \quad (1)$$

N centru de greutate în $\triangle ABD \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{|ND|}{|NQ|} = 2 \quad (2)$$

L centru de greutate în $\triangle BCD \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{|LD|}{|LS|} = 2 \quad (3)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Din 1 și 2} \Rightarrow MN \parallel PQ \\ \text{Din 2 și 3} \Rightarrow ML \parallel QS \end{array} \right\} \Rightarrow (LMN) \parallel (PQS) = (ABC) \Rightarrow (LMN) \parallel (ABC).$$

$$\frac{\sigma[SPQ]}{\sigma[ABC]} = \frac{s}{4s} = \frac{1}{4} \quad (\text{din faptul că } \sigma[AQP] = \sigma[PQS] = \sigma[QBS] = \sigma[PSC] = s).$$

$$\text{Deci } \frac{\sigma[ABC]}{\sigma[LMN]} = \frac{4}{1} \cdot \frac{9}{4} = 9.$$

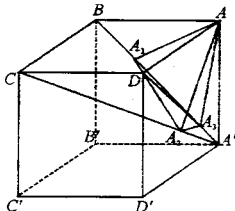
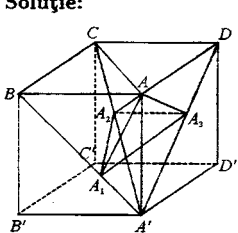
22) Se consideră un cub $[ABCD A'B'C'D']$. Punctul A se proiectează pe $A'B$, $A'C$, $A'D$ respectiv în A_1 , A_2 , A_3 . Să se arate că:

a) $A'C \perp (A_1 A_2 A_3)$;

b) $AA_1 \perp A_1A_2$, $AA_3 \perp A_3A_2$;

c) $AA_1A_2A_3$ este unpatrulater inscriptibil.

Soluție:



1. $BD \perp (AA'C)$ din ipoteză $ABCD A' B' C' D'$ cub

(1)

$$\left. \begin{array}{l} A_1 \text{ mijlocul segmentului } |BA'| \\ (ABA') \text{ isoscel și } AA_1 \perp BA' \\ A_3 \text{ mijlocul lui } |A'D| \end{array} \right\} \Rightarrow |A_1A_3| \text{ layură mijlocie în } \triangle A'BD \Rightarrow A_1A_3 \parallel BD. \quad (2)$$

Din (1) și (2) $\Rightarrow A_1A_3 \perp (AA'C) \Rightarrow A'C \perp A_1A_3$

(3)

$$\text{Din } \triangle ACA': \|AA_2\| = \frac{\|AC\| \cdot \|AA'\|}{\|A'C\|} = \frac{a\sqrt{2} \cdot a}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{Din } \triangle ABA': \|AA_1\| = \frac{a^2}{a\sqrt{2}} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}; \text{ analog } \|AA_3\| = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{În } \triangle ACA': \|AA'\|^2 = \|A'A_2\| \cdot \|A'C\| \Rightarrow a^2 = \|A'A_2\| \cdot a\sqrt{3} \Rightarrow \|A'A_2\| = \frac{a\sqrt{3}}{3} \text{ și } \|A'A_1\| = \left\| \frac{a\sqrt{2}}{2} \right\|.$$

$$(\cos \alpha = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} (\triangle A'BC))$$

$$\|A_1A_2\|^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{3} - 2 \frac{a^2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{5a^2}{6} - \frac{2a^2}{3} = \frac{a^2}{6}.$$

$$\|AA_2\|^2 = \|A_1A_2\|^2 + \|AA_1\|^2 \Rightarrow \frac{a^2 6}{9} = \frac{a^2}{6} + \frac{a^2}{2} \Rightarrow \frac{2a^2}{3} = \frac{2a^2}{3} \text{ pct.}(B) \Rightarrow AA_1 \perp A_1A_2 \text{ pct.}(B)$$

$AA_3 \perp A_2A_3$.

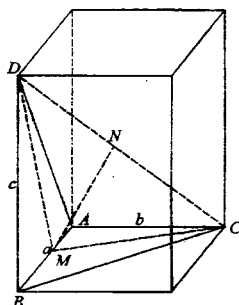
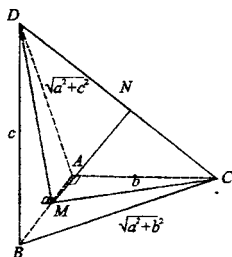
$$\triangle A_1A_2A' \text{ drept. cu } m(A'A_2A_1) = 90 \text{ pt. că } \|A'A_1\|^2 = \|A'A_2\|^2 + \|A_1A_2\|^2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{6} \Leftrightarrow \frac{a^2}{2} = \frac{3a^2}{6} (a) \Rightarrow A'C \perp A_1A_2 \quad (4)$$

Din 4 și 3 $\Rightarrow A'C \perp (A_1A_2A_3)$.

Cum $\left. \begin{array}{l} A'C \perp (A_1A_2A_3) \\ A'C \perp A_2A \text{ (prin constr.)} \end{array} \right\} \Rightarrow A_1A_2A_3A \text{ coplanare} \Rightarrow A_1A_2A_3A \text{ patrulater cu unghiurile opuse } \widehat{A_1} \text{ și } \widehat{A_3} \text{ drepte} \Rightarrow A_1A_2A_3A \text{ patrulater inscriptibil.}$

29) Se consideră triunghiurile dreptunghice BAC și $ABD(m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{ABD}) = 90^\circ)$ situate în plane perpendiculare M și N fiind mijloacele segmentelor $[AB], [CD]$. Să se arate că $MN \perp CD$.

Soluție:



Concluzia este adevărată numai dacă $\|BD\| = \|AC\|$ adică $b = c$

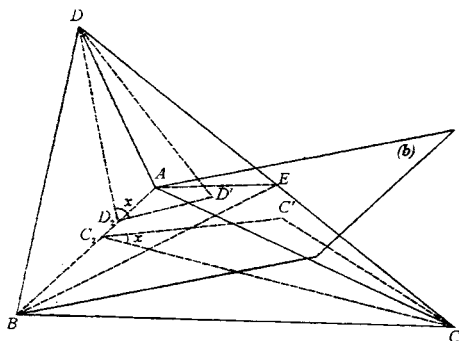
$$\|NC\| = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2}; \|MC\| = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}}; \|MN\| = \frac{b^2 + c^2}{3}$$

(cu teorema medianei ? $\triangle DMC$).

$$MN \perp DC \text{ dacă } \|MC\|^2 = \|MN\|^2 + \|NC\|^2 \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} + \frac{b^2 + c^2}{4} = b^2 + \frac{a^2}{4} \Rightarrow a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 4b^2 + a^2 \Rightarrow c^2 = b^2 \Rightarrow b = c.$$

30) Să se demonstreze că semiplanul bisector al unui unghi diedru într-un tetraedr, împarte muchia opusă în segmente proporționale cu ariile fețelor alăturate.

Soluție:



plan bisector

$$\left. \begin{array}{l} DD' \perp (ABE) = b \\ DD_1 \perp AB \\ CC' \perp (ABE) \\ CC_1 \perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow D'D_1 \perp AB \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow D_1D' \parallel C_1C'.$$

$$m(D\widehat{D_1}D') = m(C'\widehat{C_1}C) = x(b \text{ semiplan bisector})$$

$$\text{În triunghiul } DD_1D' : \left. \begin{array}{l} \sin x = \frac{\|DD'\|}{\|DD_1\|} \\ \sin x = \frac{\|CC'\|}{\|CC_1\|} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\|DD'\|}{\|DD_1\|} = \frac{\|CC'\|}{\|CC_1\|} \Rightarrow \frac{\|DD'\|}{\|CC'\|} = \frac{\|DD_1\|}{\|CC_1\|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\|DD'\|}{\|CC'\|} = \frac{\sigma[ABD]}{\sigma[ABC]} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} v[ABED] &= \frac{\sigma[ABE] \cdot \|DD'\|}{3} \\ v[ABEC] &= \frac{\sigma[ABE] \cdot \|CC'\|}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\|DD'\|}{\|CC'\|} = \frac{v[ABED]}{v[ABEC]} \quad (2)$$

dar

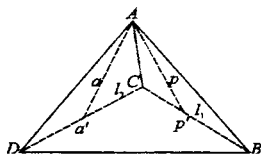
$$\left. \begin{aligned} v[ABED] &= \frac{\sigma[DEC] \cdot d(A, (DEC))}{3} \\ v[ABEC] &= \frac{\sigma[BEC] \cdot d(A, (DBC))}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{v[ABED]}{v[ABEC]} = \frac{\sigma[BDE]}{\sigma[BEC]} = \frac{\|DE\| \cdot d(B, DC)}{\|EC\| \cdot d(B, DC)} =$$

$$= \frac{\|DE\|}{\|EC\|} \Rightarrow \left| \frac{v[ABED]}{v[ABEC]} \right| = \frac{\|DE\|}{\|EC\|} \quad (3)$$

$$\text{Din 1, 2, 3} \Rightarrow \frac{\sigma[ABD]}{\sigma[ABC]} = \frac{\|DE\|}{\|EC\|} \text{ c. t. d.}$$

31) Fie A un vîrf al unui tetraedru regulat și P, Q două puncte pe suprafața lui. Să se arate că $m(\widehat{PAQ}) \leq 60^\circ$.

Soluție:



Tetraedrul fiind regulat $\Rightarrow \|AB\| = \dots =$

$$\|BD\| = l$$

$$\|CP'\| = l_1$$

$$\|CQ'\| = l_2$$

$$\begin{aligned} \cos \widehat{QAP} &= \cos(\widehat{Q'AP'}) = \frac{\|AQ'\|^2 + \|AP'\|^2 - \|Q'P'\|^2}{2\|AQ'\| \cdot \|AP'\|} \geq \text{majorăm numitorul} \geq \\ &\geq \frac{l^2 + l_2^2 - ll_2 + l^2 - ll_1 - l_1^2 - l_2^2 + l_1l_2}{2l^2} = \frac{l^2 + l^2 - ll_1 - ll_2 + l_1l_2}{2l^2} = \frac{1}{2} + \frac{(l-l_1)(l-l_2)}{2l^2} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \cos \widehat{QAP} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow m(\widehat{QAP}) \leq 60^\circ. \end{aligned}$$

Dacă unul din punctele P sau Q se află pe fața BCD problema este evidentă.

32) Să se arate că suma măsurilor unghiurilor diedre ale unui tetraedru este mai mare decît 360° .

Soluție:

163-2

Considerăm triedrul $Oxyz$ demonstrăm că suma măsurilor diedrelor acestui triedru, este mai mare decît 360° . Într-adevăr: fie $100'$ bisectoarea interioară triedrului $Oxyz$ ($1000'$ intersecția planelor bisectoare ale celor 3 diedre) ...? triedrului în A, B, C .

Mărimea fiecărui diedru cu muchiile ox, oy, oz este mai mare decît mărimile unghiurilor corespunzătoare $\triangle ABC$ suma măsurilor unghiurilor diedre ale triedrului $Oxyz$ este mai mare decît 180° .

Fie (a, b) pl. \perp pe oz în C ; $\begin{matrix} a \perp oz \\ b \perp oz \end{matrix}$ dar $|CA|$ și $|CB|$ sunt în același semispațiu față de $(ab) \Rightarrow m(\widehat{C}) < m(\widehat{ab})$.

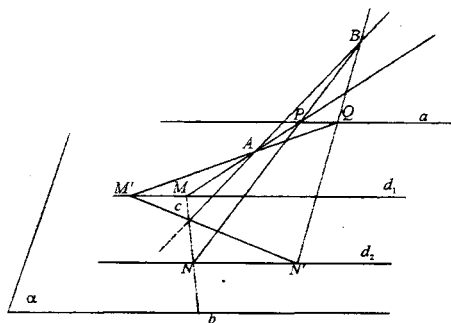
Fie în tetraedrul $ABCD$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ și α_6 cele 6 unghiuri diedre formate de fețele tetraedrului.

$$\left. \begin{array}{l} m(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) > 180 \\ m(\alpha_1) + m(\alpha_3) + m(\alpha_6) > 180 \\ m(\alpha_2) + m(\alpha_4) + m(\alpha_5) > 180 \\ m(\alpha_4) + m(\alpha_5) + m(\alpha_6) > 180 \end{array} \right\} \text{Conform inegalității stabilite anterior.}$$

$$2(m(\alpha_1) + m(\alpha_2) + \dots + m(\alpha_6)) > 4 \cdot 180 \Rightarrow m(\alpha_1) + \dots + m(\alpha_6) > 360^\circ.$$

33) Să se considere dreptele planele d_1, d_2 conținute într-un plan α și o dreaptă AB care intersectează planul α în punctul C . O dreaptă variabilă, inclusă în α și trecând prin C toate d_1, d_2 respectiv în MN . Să se afle locul geometric al intersecției $AM \cap BN$. În ce caz locul geometric este mulțimea vidă.

Soluție



Notăm cu a intersecția planelor (A, d_1) și (B, d_2) . Deci

$$(A, d_1) \cap (B, d_2) = a.$$

Fie b o dreaptă variabilă ce trece prin C și conținută în α , care taie pe d_1 și d_2 în M respectiv N . Avem: $MA \subset (A, d_1)$ $MA \cap NB = P$ (MA și NB se intersectează deoarece sînt conținute în planul determinat de (AM, b)).

Deci $P \in (Ad_1)$ și $P \in (Bd_2) \Rightarrow P \in a$ deci P descrie dreapta a intersecția planelor (A, d_1) și (B, d_2) . Reciproc: fie $Q \in a$

În planul (A, d_1) : $QA \cap d_1 = M'$.

În planul (B, d_2) : $QB \cap d_2 = N'$.

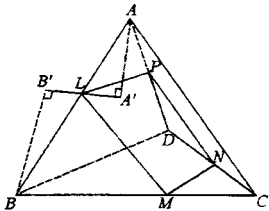
Drepte $N'M'$ și AB sînt coplanare (ambele se află în planul (Q, A, B)). Dar cum $M'N' \subset \alpha$ și AB are doar punctul C comun cu $\alpha \Rightarrow M'N' \cap AB = C$.

Deci $M'N'$ trece prin C . Dacă planele (A, d_1) și (B, d_2) sînt paralele locul geometric este mulțimea vidă.

34) Un plan α intersectează laturile $[AB], [BC], [CD], [DA]$ ale unui tetraedru $[ABCD]$ în punctele L, M, N, P . Să se demonstreze că:

$$\|AL\| \cdot \|BM\| \cdot \|CN\| \cdot \|PD\| = \|BL\| \cdot \|CM\| \cdot \|DN\| \cdot \|AP\| \quad a$$

Soluție: Caz particular. Dacă planul $(LMNP) \parallel BD$ avem:



Reamintim teorema: Dacă un plan γ intersectează două plane α și β a.i. $\sigma \parallel \alpha \cap \beta \Rightarrow (\gamma \cap \alpha) \parallel (\gamma \cap \beta) \parallel (\alpha \cap \beta)$. Dacă planul $(LMNP) \parallel BD$ avem:

$$\left. \begin{aligned} LP \parallel MN \parallel BD &\Rightarrow \frac{\|LA\|}{\|AP\|} = \frac{\|LB\|}{\|PD\|} \Rightarrow \|LA\| \cdot \|PD\| = \|AP\| \cdot \|LB\| \\ MN \parallel BD &\Rightarrow \frac{\|NC\|}{\|MC\|} = \frac{\|ND\|}{\|MB\|} \Rightarrow \|BM\| \cdot \|NC\| = \|ND\| \cdot \|MC\| \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|AL\| \cdot \|BM\| \cdot \|CN\| \cdot \|DP\| = \|BL\| \cdot \|CM\| \cdot \|DN\| \cdot \|AP\|.$$

$$\text{Dacă } (LMNP) \parallel AC \text{ avem: } LM \parallel PN \parallel AC \Rightarrow \frac{\|PD\|}{\|DN\|} \text{ și } \frac{\|AL\|}{\|MC\|} = \frac{\|LB\|}{\|BM\|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \|CN\| \cdot \|DP\| = \|DN\| \cdot \|AP\| \\ \|AL\| \cdot \|BM\| = \|BL\| \cdot \|CM\| \end{cases} \Rightarrow \text{relația a}$$

Soluție:

Fie A', B', C', D' proiecțiile punctelor A, B, C, D în planul $(MNPL)$.

De ex. punctele B', L, A' sînt coliniare în planul $(LPMN)$ deoarece se găsesc pe proiecția dreptei AB în acest plan.

$$\triangle ALA' \sim \triangle BLB'(U, U) \Rightarrow \frac{\|AL\|}{\|LB\|} = \frac{\|AA'\|}{\|BB'\|}.$$

$$\text{Analog obținem: } \frac{\|PD\|}{\|AP\|} = \frac{\|DD'\|}{\|AA'\|}, \frac{\|CN\|}{\|ND\|} = \frac{\|CC'\|}{\|DD'\|}, \frac{\|BM\|}{\|MC\|} = \frac{\|BB'\|}{\|CC'\|}.$$

Prin înmulțirea celor 4 relații \Rightarrow

$$\frac{\|AL\| \cdot \|PD\| \cdot \|CN\| \cdot \|BM\|}{\|LB\| \cdot \|AP\| \cdot \|DN\| \cdot \|MC\|} = 1 \Rightarrow \text{relația (a) din d}$$

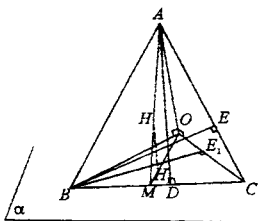
35) Dintr-un punct A exterior unui plan α se duce perpendiculara AO $O \in \alpha$ și se iau $B, C \in \alpha$. Fie H, H_1 respectiv ortocentrele triunghiurilor ABC, OBC ; AD și BE înălțimi în triunghiul ABC , iar BE_1 înălțime în triunghiul OBC . Să se arate:

a) $HH_1 \perp (ABC)$

$$\text{b) } \frac{\|OA\|}{\|AD\|} \cdot \frac{\|DH_1\|}{\|H_1B\|} \cdot \frac{\|BE\|}{\|EE_1\|} = 1.$$

Soluție:

M-Mijlocul lui $|BC|$.



36) Se dă un tetraedru $[ABCD]$ în care $AB \perp CD$ și $AC \perp BD$.

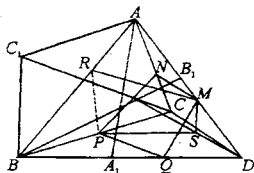
Să se arate:

a) $\|AB\|^2 + \|CD\|^2 =$

$\|BC\|^2 + \|AD\|^2 = \|CA\|^2 + \|BD\|^2$

b) mijloacele celor 6 muchii se află pe o sferă.

Soluție:



(1) $AB \perp CD$ (ipoteză).

$DH \perp (ABC) \Rightarrow DH \perp AB \Rightarrow AB \perp DH$ (2)

Din 1 și 2 $\Rightarrow AB \perp (CDH) \Rightarrow AB \perp CH \Rightarrow CH$
înălțime în $\triangle ABC$ a

$AC \perp BD$ (3)

$DH \perp (ABC) \Rightarrow DH \perp AC \Rightarrow AC \perp DH$ (4)

Din 3 și 4 $\Rightarrow AC \perp (BDH) \Rightarrow AC \perp BH \Rightarrow BH$ înălțime în $\triangle ABC$ b

Din a și b $\Rightarrow H$ ortocentrul $\triangle ABC$. Fie C_1 punctul diametral opus lui C în cercul $C(ABC)$ CC_1 diametru $\Rightarrow m(\widehat{C_1BC}) = 90^\circ$ dar și $AH \perp BC \Rightarrow AH \parallel BC_1$. Analog $BH \parallel C_1A$ deci $AHBC_1$ paralelogram, avem astfel:

$\|AH\|^2 + \|BC\|^2 = \|BC_1\|^2 + \|BC\|^2 = \|CC_1\|^2 = (2R)^2$ analog

$\|BH\|^2 + \|AC\|^2 = (2R)^2$ ($\|BH\| = \|AB_1\|$) B_1 diametral opus lui B

$\|CH\|^2 + \|AB\|^2 = (2R)^2$ ($\|CH\| = \|BA_1\|$)

dar $DH \perp (ABC) \Rightarrow \left. \begin{aligned} \|AH\|^2 &= \|AD\|^2 - \|DH\|^2 \\ \|BH\|^2 &= \|BD\|^2 - \|DH\|^2 \\ \|CH\|^2 &= \|DC\|^2 - \|DH\|^2 \end{aligned} \right\} \text{înlocuind sus avem:}$

$\|AD\|^2 + \|BC\|^2 = (2R)^2 + \|DH\|^2$

$\|BD\|^2 + \|AC\|^2 = (2R)^2 + \|DH\|^2$

$\|DC\|^2 + \|AB\|^2 = (2R)^2 + \|DH\|^2$ c.t.d.

Fie N, M, Q, P, S, R mijloacele muchiilor. Patrulaterului $NMQP$ pentru că:

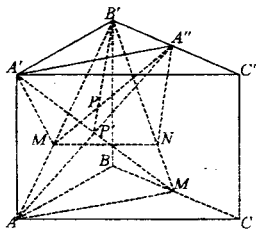
$\left. \begin{aligned} NM \parallel CD \parallel PQ \text{ (linii mijlocii)} \\ QM \parallel AB \parallel PN \\ \text{dar } CD \perp AB \end{aligned} \right\} \Rightarrow MNQP \text{ dreptunghi } |NQ| \cap |PM| = \{O\}.$

Analog $MSPR$ dreptunghi cu $|MP|$ diagonală comună cu a primul dreptunghi deci cele 6 puncte sînt egal depărtate de "O" mijlocul diagonalelor în cele două dreptunghiuri \Rightarrow cele 6

puncte sînt pe o sferă.

37) Se dă o prismă triunghiulară $[ABCA'B'C']$ care are fețele laterale pătrate. Fie M un punct mobil pe $[AB']$, N proiecția lui M pe (BCC') și A'' mijlocul lui $[B'C']$. Să se arate că $A'N$ și MA'' se intersectează într-un punct P și să se afle locul geometric al lui P .

Soluție:



M arbitrar pe $|AB'|$

$N = pr_{(BCC')}M$

A'' mijlocul segmentului $[B'C']$

Cînd $M = B'$, punctul P ocupă poziția B' .

Cînd $M = A$, punctul P ocupă poziția $\{P_1\} = [A'A_1] \cap [AA'']$

($A'A''A_1A$ dreptunghi, deci P_1 este intersecția diagonalelor dreptunghiului)

[Locul geometric este $[B'P_1]$].

Fie M arbitrar $M \in |AB'|$.

$N = pr_{(BCC')}M \in |A_1B'|$ deoarece: $(B'AA_1) \perp (B'CC')$.

Prin modul în care a fost construit $AA_1 \perp BC$, $AA_1 \perp CC' \Rightarrow AA_1 \perp (B'CC') \Rightarrow (\forall)$ plan ce conține pe AA_1 este perpendicular pe $(B'CC')$, în particular $(B'AA_1) \perp (B'CC')$

(1) $[B'P_1] \subset (B'A''A)$ pentru că $B', P \in (B'AA'')$

(2) $[B'P_1] \subset (A'B'A_1)$ din acest motiv $B', P_1 \in (A'B'A_1)$

Din 1 și 2 $\Rightarrow B'P_1 = (A'B'A_1) \cap (B'A''A)$

Fie $\{P\} = |MA''| \cap |A'N|$
 Cum $|MA''| \subset (B'A''A)$ și $|A'N| \subset (A'B'A_1)$ } $\Rightarrow P \in (B'A''A) \cap (A'B'A_1) \Rightarrow P \in |B'P_1|$ $N = pr_{(B'CC')}M$

Deci $(\forall) M \in |B'A|$ și avem că $|MA''| \cap |A'N| \in |B'P_1|$.

Reciproc. Fie P arbitrar, $P \in |B'P_1|$ și

În planul $(B'A''A) : \{M\} = |B'A| \cap |A''P|$

În planul $(B'A'A_1) : \{N\} = |B'A_1| \cap |A'P|$

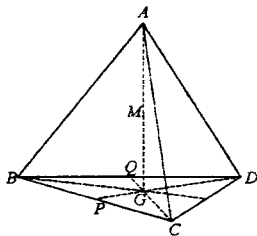
Într-adevăr: $A'A'' \parallel (B'AA_1)$ deci orice plan care trece prin $A'A''$ va intersecta $(B'AA_1)$ după o dreaptă paralelă cu $A'A''$. Deci $MN \parallel A'A''$ sau $MN \parallel AA_1$ cum $M \in (B'AA_1) \Rightarrow MN \perp (B'CC')$.

Am dem. $(\forall) M \in [B'A]$ și $N = pr_{(B'CC')}M$ avem că $\{P\} = [MA''] \cap [A'N]$ descrie $[B'P_1]$ și reciproc, $(\forall) P \in [B'P_1]$ există $M \in [B'A]$ și $N \in [B'A_1]$ astfel încât $N = pr_{(B'CC')}M$ și P este intersecția diagonalelor patrulaterului $A'NMA''$.

38) Fie tetraedrul $[ABCD]$ și G centru de greutate al triunghiului BCD . Să se arate că dacă $M \in AG$ atunci

$$v[MGBC] = v[MGCD] = v[MGDB].$$

Soluție:



$$1 \quad \sigma[CDG] = \sigma[BDG] = \sigma[BCG] = \frac{\sigma[BCD]}{3}$$

rezultat cunoscut

$$3 \quad \begin{cases} v[MGCD] = \frac{\sigma[CGD]d(M, (BCD))}{3} \\ v[MGDB] = \frac{\sigma[BDG]d(M, (BCD))}{3} \\ v[MGBC] = \frac{\sigma[BCG]d(M, (BCD))}{3} \end{cases}$$

$$\text{Din 1 și 3} \Rightarrow v[MGCD] = v[MGDB] = v[MBC].$$

39. Se consideră punctul $M \in \text{int. unui triedru tridreptunghic de vârf } O$. Să se ducă prin M un plan care să intersecteze muchiile triedrului respectiv în punctele A, B, C , astfel încât M să fie ortocentrul triunghiului ABC .

Soluție:

Din ipoteză:

$$OA \perp OB \perp OC \perp OA$$

Presupunem problema rezolvată.

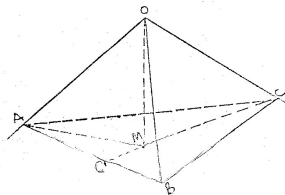
Fie M ortocentrul unui triunghi ABC .

$$\text{But } CC' \perp AB \Rightarrow \begin{cases} AB \perp (OCC') \\ MO \perp (OCC') \end{cases} \Rightarrow AB \perp OM \Rightarrow MO \perp AB \quad (1)$$

$$AO \perp (COB) \Rightarrow AO \perp BC, \text{ but } AA' \perp BC \Rightarrow \begin{cases} BC \perp (AOA') \\ MO \subset (AOA') \end{cases} \Rightarrow BC \perp MO \Rightarrow MO \perp BC \quad (2)$$

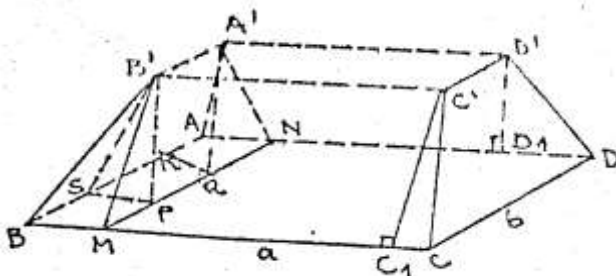
$$\text{Din (1) și (2)} \Rightarrow MO \perp (ABC)$$

Deci planul (ABC) care trebuie construit trebuie să fie perpendicular pe OM în M .



40. O grămadă de nisip are drept baze două dreptunghiuri situate în plane paralele și fețele laterale trapeze. Să se găsească volumul grămezii cunoscând dimensiunile a' , b' ale bazei mici, a , b ale bazei mari și h distanța dintre cele două baze.

Soluție:



$$A'N \perp AD, B'M \perp BC$$

$$\|BM\| = \frac{a-a'}{2}, \|PM\| = \frac{b-b'}{2}$$

$$v[BMPSPB'] = \frac{a-a'}{2} \cdot \frac{b-b'}{2} \cdot \frac{h}{3}$$

$$v[SPWRA'B'] = \frac{\sigma[SPB'] \cdot \|B'A'\|}{3} = \frac{a-a'}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot b'$$

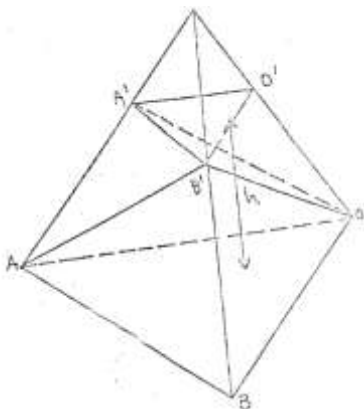
$$v[B'A'NMC'D'D_1C_1] = \frac{(b+b')h}{2} \cdot a'$$

$$\begin{aligned} v[ABA'B'CDC'D'] &= 2 \left[2 \cdot \frac{a-a'}{2} \cdot \frac{b-b'}{2} \cdot \frac{h}{3} + \frac{a-a'}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot b' \right] + \left(\frac{(b+b')h}{2} \right) \cdot a' = \frac{h}{6} (2ab - 2ab' - 2a'b' + \\ &3ab' - 3a'b' + 3a'b + 3a'b') = \frac{h}{6} [ab + a'b' + (a+a')(b+b')]. \end{aligned}$$

41. Se dă un triunghi de piramidă de înălțime h și ariile bazelor B și b . Se unește un punct oarecare al bazei mari cu vârfurile A, B, A', B' ale unei fețe laterale. Să se arate că $v[OA'B'A] = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{B}} v[OABB']$.

Soluție:

Se determină, pentru relația de mai sus, formula volumului trunchiului de piramidă.



$$v[OABB'] = \frac{B \cdot h}{2}$$

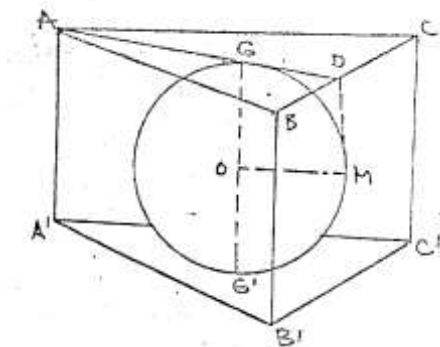
$$v[OA'B'A] = v[ABOO'A'B'] - v[ABB'O] - v[A'B'O'O] = \frac{h}{3} (B + b + \sqrt{Bb}) - \frac{Bh}{3} - \frac{bh}{3} = \frac{h}{3} \sqrt{Bb}.$$

Deci:

$$\begin{aligned} \frac{v[OA'B'A]}{v[DABB']} &= \frac{\frac{h}{3} \sqrt{Bb} \cdot \sqrt{Bb}}{\frac{Bh}{3} \cdot B} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{B}} \Rightarrow v[OA'B'A] \\ &= \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{B}} \cdot v[OABB'] \end{aligned}$$

42. O prismă triunghiulară regulată este circumscrisă unei sfere de rază R . Să se afle aria și volumul prisme.

Soluție:



$$d(GG') = h = 2R$$

$$\text{Fie } l = \|AC\| \Rightarrow \|AD\| = \frac{l\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \|GD\| = \frac{l\sqrt{3}}{6}$$

$$\text{Figura } GDMO \text{ dreptunghi} \Rightarrow \|GD\| = \|OM\| \Rightarrow \frac{l\sqrt{3}}{6} = R = 2\sqrt{3}R$$

$$\text{Deci, aria laterală este } S_l = 3 \cdot 2\sqrt{3}R \cdot R = 12\sqrt{3}R^2.$$

$$v[ABCA'B'C'] = \sigma[ABC] \cdot 2R = 2\sqrt{3}R \cdot \frac{2\sqrt{3}R\sqrt{3}}{4} \cdot 2R = 6\sqrt{3}R^2.$$

Aria totală este:

$$\begin{aligned} S_t &= S_l + 2\sigma[ABC] = 12\sqrt{3}R^2 + 2 \cdot 3R\sqrt{3}R^2 \\ &= 18\sqrt{3}R^2 \end{aligned}$$

43. Un triunghi dreptunghic cu catetele respective b și c iar ipotenuza a se rotește pe rând în jurul ipotenuzei și al celor două catete. $V_1, V_2, V_3, S_1, S_2, S_3$ fiind volumele respective ariile laterale ale celor trei corpuri formate, să se arate că:

$$1. \frac{1}{V_1^2} = \frac{1}{V_2^2} = \frac{1}{V_3^2}$$

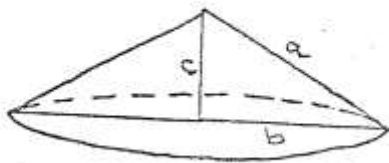
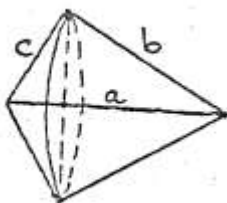
$$2. \frac{S_2}{S_3} + \frac{S_3}{S_2} = \frac{S_2 + S_3}{S_1}$$

Soluție:

Fie V_1 și S_1 volumul, respectiv aria obținută în urma rotației în jurul lui a .

V_2 și S_2 volumul, respectiv aria obținută în urma rotației în jurul lui b .

V_3 și S_3 volumul, respectiv aria obținută în urma rotației în jurul lui c .



Deci:

$$V_1 = \frac{\pi \cdot i^2 (\|CD\| + \|DB\|)}{3} = \frac{\pi \cdot i^2 \cdot a}{3}$$

$$S_1 = \pi \cdot i \cdot c + \pi \cdot i \cdot b = \pi \cdot i \cdot (b + c)$$

$$V_2 = \frac{\pi c^2 b}{3} = \frac{\pi c^2 b^2}{3b} = \frac{\pi b^2 c^2 a}{3a^2}$$

$$S_2 = \pi \cdot c \cdot a$$

$$V_3 = \frac{\pi b^2 c}{3} = \frac{\pi b^2 c^2}{3c} = \frac{\pi b^2 c^2}{3a}$$

$$S_3 = \pi \cdot b \cdot a$$

Așadar:

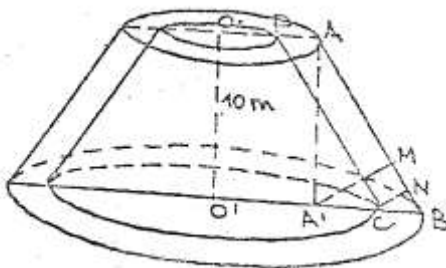
$$\frac{1}{V_1^2} = \frac{1}{V_2^2} + \frac{1}{V_3^2} \Leftrightarrow \frac{9a^2}{(\pi b^2 c^2)^2} = \frac{9c^2}{(\pi b^2 c^2)^2} + \frac{9c^2}{(\pi b^2 c^2)^2}$$

$$\frac{S_2}{S_3} + \frac{S_3}{S_2} = \frac{S_2 + S_3}{S_1} \Leftrightarrow \frac{c}{b} + \frac{b}{c} = \frac{\pi a(b+c)}{\pi i(b+c)} \Leftrightarrow \frac{c^2 + b^2}{b \cdot c}$$

$$= \frac{a}{i}$$

$$\text{Dar } i \cdot a = b \cdot c \Rightarrow \frac{c^2 + b^2}{bc} = \frac{a^2}{bc}, \|AD\| = i.$$

44. Un coș de fabrică are forma unui trunchi de con cu înălțimea de 10 m, bazele trunchiului de con au lungimile exterioare de 3,14 m și 1,57 m, grosimea zidului fiind de 18 cm. Să se calculeze volumul coșului.



$$r = \|OA\| = 25 \text{ cm}$$

$$R = \|O'B\| = 50 \text{ cm}$$

$$2\pi r = 1,57 \Rightarrow r = 0,25 \text{ m}$$

$$2\pi R = 3,14 \Rightarrow R = 0,50 \text{ m}$$

$$\|CN\| = 18 \text{ cm} = 0,18 \text{ m}$$

$$\|A'B\| = 25 \text{ cm}$$

$$\|AB\| = \sqrt{100 + 0,0625} = 10,003125$$

$$\|A'M\| = \frac{\|AA'\| \cdot \|A'B\|}{\|AB\|} = \frac{10 \cdot 0,25}{10,003125} \approx 0,25$$

$$\frac{\|CN\|}{\|A'M\|} = \frac{\|CB\|}{\|BA'\|} \Rightarrow \frac{0,18}{0,25} = \frac{\|CB\|}{0,25} \Rightarrow \|CB\| = 0,18$$

$$\|O'C\| = R' = 0,50 - 0,18 = 0,32$$

$$\|OP\| = r' = 0,25 - 0,18 = 0,07$$

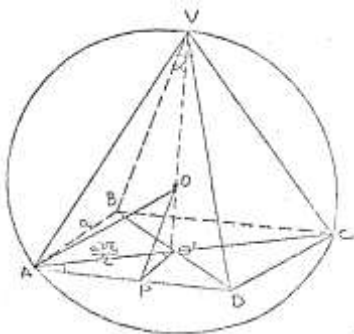
$$V = \frac{\pi 1}{3} (R^2 + r^2 + Rr)$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi 10}{3} (0,50^2 + 0,25^2 + 0,50 \cdot 0,25 - 0,32^2 - 0,07^2 \\ &\quad - 0,32 \cdot 0,07) = \frac{\pi 10}{3} (0,4375 - 0,1297) \\ &= 1,026\pi m^3 \end{aligned}$$

45. Într-o sferă de rază R se înscrie o piramidă regulată cu baza un pătrat și unghiul de la vârful unei fețe laterale de măsură α . Să se afle:

- volumul piramidei înscrise.
- aria laterală și totală a piramidei
- valoarea α când înălțimea piramidei este egală cu raza sferei.

Soluție:



$$\|VP\| = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{În } \triangle VAP: \|VA\| = \frac{A}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

$$\text{În } \triangle VAO': \|VO'\|^2 = \frac{a^2}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{a^2}{2}.$$

$$\|VO'\| = \frac{a\sqrt{\cos \alpha}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$\text{În } \triangle VOO': \|OO'\| = \frac{a\sqrt{\cos \alpha}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} - R.$$

$$\begin{aligned} R^2 &= \frac{a^2}{2} + \left(\frac{a\sqrt{\cos \alpha}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} - R \right)^2 \Rightarrow \frac{a^2}{2} + \frac{a^2 \cos \alpha}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{2aR\sqrt{\cos \alpha}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \\ &\Rightarrow a = \frac{4R\sqrt{\cos \alpha} \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \left(2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \cos \alpha \right)} \Rightarrow a \\ &= 4R\sqrt{\cos \alpha} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

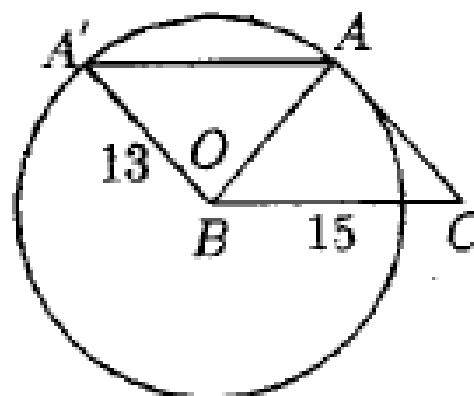
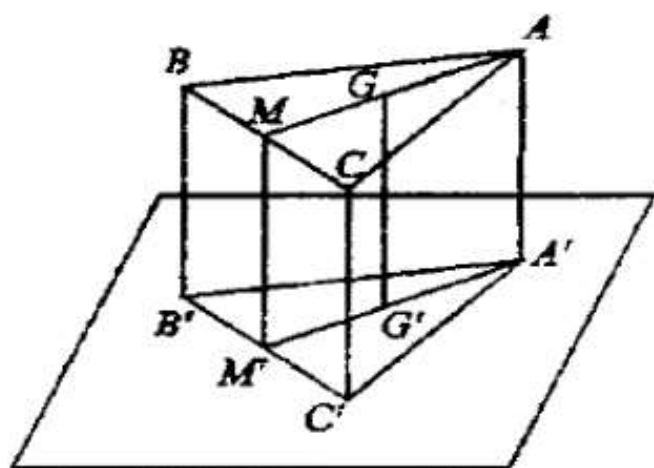
$$\begin{aligned} A_l &= 4 \frac{a^2 \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cdot 2 \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{a^2 \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = 16R^2 \cos \alpha \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \\ &= 8R^2 \cos \alpha \sin \alpha = 4R^2 \sin 2\alpha \end{aligned}$$

$$A_t = A_l + a^2 = 4R^2 \sin 2\alpha + 16R^2 \cos \alpha \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\begin{aligned} \|VO'\| &= R \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{\cos \alpha}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \Rightarrow R \\ &= 4R\sqrt{\cos \alpha} \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\sqrt{\cos \alpha}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \\ &\Rightarrow 2 \cos \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 60^\circ. \end{aligned}$$

Acest volum este o versiune nouă, revizuită și adăugită, a "Problemelor Compilate și Rezolvate de Geometrie și Trigonometrie" (Universitatea din Moldova, Chișinău, 169 p., 1998), și include probleme de geometrie și trigonometrie, compilate și soluționate în perioada 1981-1988, când profesam matematica la Colegiul Național "Petrache Poenaru" din Bălcești, Vâlcea (Romania), la Lycée Sidi El Hassan Lyoussi din Sefrou (Maroc), apoi la Colegiul Național "Nicolae Balcescu" din Craiova. Gradul de dificultate al problemelor este de la mediu spre greu. Cartea se dorește material didactic pentru elevi, studenți și profesori.

Autorul



ISBN 978-1-59973-325-8



9 781599 733258 >